Die Gleichgewichtsbedingungen

der

Raummechanik

mit besonderer Berücksichtigung der elektrischen, magnetischen und Gravitationserscheinungen

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

philosophischen Fakultät Rostock

vorgelegt von

Johannes Geißler

aus Dresden

ACAD. LANDRAT BIBL.

1911

Buchdruckerei Albert Hille, Dresden-N.

Referent: Prof. Dr. R. H. Weber

§ 1.
Einführung.

Der bekannten axiomähnlichen Annahme des räumlichstetigen Zusammenhanges der Erscheinungen wird man in den verschiedenen Zweigen der Physik dadurch gerecht, daß man alle Fernwirkungen aus den Gesamtwirkungen der räumlich einander unmittelbar benachbarten Substanzpunkte erklärt und berechnet.

Vorliegende Abhandlung stellt nun einen Versuch dar, das eben genannte Prinzip auch bei den mechanischen Gleichgewichtsproblemen durchzuführen. Hierbei müssen die mechanischen Begriffe der Kraft und des Weges im üblichen „relativen" Sinne offenbar außer Betracht kommen; den eigentlichen Gegenstand der Untersuchung bilden vielmehr die zwischen räumlich einander unmittelbar benachbarten Punkten auftretenden relativen Kräfte (d. s. Spannungen) und Wege (d. s. Dehnungen). Eine Uebersicht über die Verteilung dieser beiden im Raum wird in zwei diesbezüglichen besonderen Abschnitten gegeben; mit Hilfe des darin aufgefundenen mathematischen Apparates ist es dann möglich, den Proportionalitätsfall zwischen Spannungen und Dehnungen, den man beim Elastizitätsproblem näherungsweise setzen kann, in einem dritten Abschnitt zu behandeln.

I. ABSCHNITT.
Relative Kräfte.

§ 2.
Mechanische Kraftlinien.

Befindet sich ein System von räumlich benachbarten Substanzpunkten im statischen Gleichgewicht, so sind offenbar folgende zwei Bedingungen erfüllt:

a) Die an jedem Punkte des Systems angreifenden Kräfte (geometrisch addiert) sind in Summa gleich Null.

b) Alle Punkte des Systems nehmen eine relative Ruhelage zueinander ein, d. h. ihre relativen Geschwindigkeiten sind Null.

Offenbar erfüllen auch alle beliebigen, aus dem System herausgeschnittenen, Stücke endlicher Größe dieselben Bedingungen im Gleichgewichtsfalle. Dabei erhält aber, wenigstens bei einem festen Körper, die erste der beiden Bedingungen eine erweiterte Bedeutung. Nicht bloß die geometrische Summe aller auf das beliebig herausgeschnittene Stück einwirkenden Kräfte ist Null, sondern, da die Kräfte auch Drehmomente ausüben (soweit sie nämlich als zusammengehörige Kräftepaare aufgefaßt werden können), so ist auch die geometrische Summe all dieser Drehmomente gleich Null.

Dieser Weg der Betrachtung wird hier jedoch nicht eingeschlagen. Vielmehr werden immer nur diejenigen Kräfte als zusammengehörig, d. h. als Paare aufgefaßt, die zusammen in ein und dieselbe Gerade fallen, und dies aus dem Grunde, weil der Begriff des Kräftepaares, soweit er sich mit dem des Drehmomentes deckt, immer im Gegensatz zu der in § 1 ausgesprochenen Forderung, bereits ein räumlich ausgedehntes System voraussetzt, sich dagegen die obigen Gleichgewichtsbedingungen, die die Grundlagen aller Folgerungen bilden müssen, auf jeden einzelnen Punkt des Systems beziehen, an dem nur Kräftepaare angreifen können, die in derselben Geraden liegen. Jede andere Kraft, die etwa in einer zur ersten Kraft parallelen Geraden verläuft, verfehlt diesen Punkt des Systems und greift an einem ihm mehr oder weniger benachbarten Punkt an.

Hat man sich so an jedem Substanzpunkte P ein entgegengesetztes und in dieselbe Gerade fallendes Paar Kräfte k und l angreifend zu denken ($k+l=0$), so darf man andererseits nicht übersehen, daß jede einzelne Kraft eines jeden dieser Kräftepaare, in ihrer Absolutheit aufgefaßt, streng genommen nur ein Produkt unserer Vorstellung ist. An sich gibt es keine absoluten mechanischen Kräfte k und l, sondern immer nur relative, d. h. solche, die zwischen zwei benachbarten Substanzpunkten wirksam sind, indem sie diese einander näher zu bringen oder voneinander zu entfernen bestrebt sind. Im ersteren Falle spricht man von Zugspannungen, im letzteren von Druckspannungen zwischen den beiden benachbarten Substanzpunkten.

Eine jede Zug- bez. Druckspannung kann man sich also wieder als ein Paar zusammengehöriger, entgegengesetzt gleicher und in dieselbe Gerade fallender, absoluten Kräfte denken, d. h. die Kraft k gehört zu einem Kräftepaar i und k ($i+k=0$), und die Kraft l zu einem Kräftepaar l und m ($l+m=0$). Hierbei wirkt natürlich die Kraft i auf den zu P benachbarten Punkt O und m auf den zu P benachbarten und zu O diametralliegenden Punkt Q. Wenn man nun bedenkt, daß

an den Punkten Q und R wieder Kräftepaare angreifen müssen, wobei immer aus:

. . . . h+i=0, k+l=0, m+n=0 . . . . . und aus:

. . . g+h=0, i+k=0, l+m=0 . . . . folgt:

1. . . . =g=i=l=n= . . . . und 2. . . . . =h=k=m= . . . ,

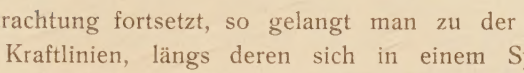

Fig. 1

und diese Betrachtung fortsetzt, so gelangt man zu der Vorstellung mechanischer Kraftlinien, längs deren sich in einem System von Substanzpunkten die Kräfte fortpflanzen. Diese mechanischen Kraftlinien sollen Zuglinien heißen, falls sie Zugkräfte, Drucklinien, falls sie Druckkräfte fortpflanzen.

§ 3.

Messung mechanischer Kraftlinien. Definition.

Der genaue geometrische Charakter der in § 2 definierten mechanischen Kraftlinien muß vorläufig dahingestellt bleiben. Man kann sie als Linien von Vektoren ansehen, deren Richtung überall in die Richtung der Linien selbst fällt, die aber, bei einem Schritt von Punkt zu Punkt, ihr Vorzeichen immer abwechseln.

Der geometrische Charakter der mechanischen Kraftlinie ändert sich folglich dadurch nicht, daß man sie in der Vorstellung einmal in dieser und einmal in der entgegengesetzten Richtung durchwandert. Es ist also zunächst festzustellen, daß die mechanischen Kraftlinien mit den elektrischen und magnetischen Kraftlinien nicht in dieselbe Gattung geometrischer Gebilde gehören.

Gleichwohl können wir, ohne nähere Kenntnis ihres geometrischen Charakters zu haben, die mechanischen Kraftlinien dadurch messen, daß wir sie uns durchschnitten und durch Kräfte wieder vereinigt denken.

Aus der Möglichkeit des Messens folgt weiter die Möglichkeit, die Einheit der Kraftlinien zu definieren. Wir wollen immer unter einer Kraftlinie eine Linie (wie gesagt vorläufig unbekannten Charakters) verstehen, die, durchschnitten, zur Wiedervereinigung ihrer getrennten Endpunkte die Krafteinheit erfordert.

Verlaufen die mechanischen Kraftlinien speziell in einer Fläche (z. B. in einem dünnen Blech), so können wir uns diese Fläche in einer Linie beliebiger Richtung durchschnitten denken. Wir finden

hier ein Maß für die mechanischen Kraftlinien, wenn wir die Kräfte bestimmen, welche nötig sind, die aneinandergehörigen Punkte der Flächenränder miteinander genau so wieder zu verknüpfen, wie sie zuvor miteinander vereinigt waren.

Die eben gedachte Schnittlinie soll „Maßlinie“ heißen. Wenn die genannten Kräfte unter Beziehung auf die Längeneinheit der Maßlinie gemessen werden, soll das Ergebnis dieser Messung „linear gemessene Flächendichte“ heißen (Dimension: Kraft dividiert durch Länge).

Ein Bild derselben erhält man, wenn man die Kraftlinien als diskrete Linien mit einer der Dichte gleichen Zahl auf die Längeneinheit der Maßlinie verteilt.

Verlaufen die mechanischen Kraftlinien räumlich, d. h. in einem Körper von drei Ausdehnungen, so können wir uns den Körper entsprechend durch eine Fläche beliebiger Richtung durchschnitten und die Kräfte bestimmt denken, welche nötig sind, die aneinander gehörigen Punkte der Schnittflächen miteinander wieder zu verknüpfen.

Die soeben gedachte Schnittfläche soll „Maßfläche“ heißen. Wenn die genannten Kräfte unter Beziehung auf die Flächeneinheit der Maßfläche gemessen werden, soll das Ergebnis dieser Messung „flächenhaft gemessene Raumdichte“ heißen (Dimension: Kraft dividiert durch Fläche).

§ 4.

Normal- und Schubkomponenten der Kraftlinien.

Wir nehmen jetzt in einer Fläche nur eine einzige Schar parallel und der Länge nach in unveränderter Zahl verlaufender Kraftlinien an. Wir legen durch die Fläche eine Maßlinie m_1 senkrecht zur Schar, und es betrage die gefundene linear gemessene Flächendichte A.

Würden wir aber eine andere Maßlinie m_2 durch die Schar hindurchlegen, deren Normale mit den Kraftlinien den Winkel α bildet, so würden wir, wie sich leicht zeigen läßt, statt A die Größe $A \cos^2 \alpha$ als Wert der linear gemessenen Flächendichte finden. Der Faktor $\cos \alpha$ tritt zweimal auf, weil die zur Maßlinie senkrechte Kraftkomponente zu bilden ist, und weil die Maßlinie, die die gleiche Zahl von Kraftlinien schneidet, bei schräger Lage $\frac{1}{\cos \alpha}$ mal soviel Längeneinheiten hat als bei senkrechter, die Zahl der letzteren jedoch den Divisor bildet.

Bei schiefer Lage der Maßlinie tritt außerdem eine bisher nicht betrachtete Schubkomponente auf. Diese beträgt $A \sin \alpha \cos \alpha$. Erst

die geometrische Summierung von $A\cos^2\alpha$ und $A\sin\alpha\cos\alpha$ führt wieder auf die Komponente $A.\cos\alpha$ der Kraft zurück, und zwar nach Größe und Richtung (s. Fig. 2 und 3):

$$A\sqrt{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}=A\cos\alpha.$$

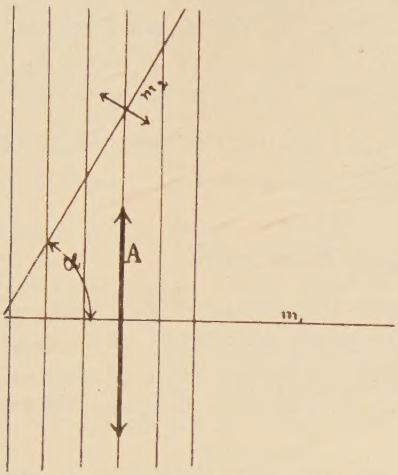

Fig. 2

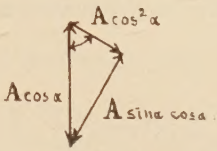

Fig. 3

§ 5.

Die Kraftmenge.

In diesem ersten Abschnitt unsrer Untersuchung läßt sich nicht feststellen, ob mit einer endlichen oder unendlichen Anzahl übereinandergelagerter Kraftlinienscharen verschiedener Richtung gerechnet werden muß. Doch läßt sich unabhängig davon folgende Definition aufstellen:

Die Summe der Längeneinheiten aller in einem Flächen- oder Raumelement zu zählenden Kraftlinien soll Kraftmenge heißen (Dimension: Kraft mal Länge).

Bezieht sich diese Größe auf Kraftlinien, die in einer Fläche verlaufen, so ergibt ihr Verhältnis zur Flächeneinheit dieser Fläche die „flächenhaft gemessene Flächendichte“ (Dimension: Kraft mal Länge dividiert durch Fläche), und bezieht sie sich auf räumlich verlaufende Kraftlinien, so ergibt ihr Verhältnis zur Volumeneinheit die „räumlich gemessene Raumdichte“ (Dimension: Kraft mal Länge dividiert durch Volumen).

Beispiele. Ergibt ein gespanntes Stahlband von der Länge l und der Breite b bei Durchschneidung senkrecht zur Längsrichtung die linear gemessene Flächendichte A, so folgt, daß es mit der Kraft A.b

gespannt ist und die Gesamtkraftmenge A . b . l enthält. Seine flächenhaft gemessene Flächendichte beträgt gleichfalls $\frac{A.b.l}{b.l} = A$, da in ihm nur eine Schar paralleler Kraftlinien vorkommt.

Ergibt ein gespannter parallelepipedischer Stab vom Querschnitt b . d und der Länge l im Querschnitt die flächenhaft gemessene Raumdichte A, so folgt, daß er mit der Kraft A . b . d gespannt ist und die Gesamtkraftmenge A . b . d . l enthält. Die räumlich gemessene Raumdichte beträgt gleichfalls $\frac{A.b.d.l}{b.d.l} = A$, da in ihm nur eine einzige Schar paralleler Kraftlinien vorkommt.

§ 6.

Homogene Kraftflächen.

Definition. Eine so gespannte oder gedrückte Fläche, in welcher sich die linear gemessene Flächendichte gleichbleibt, unabhängig davon, in welcher Richtung die Maßlinie hindurchgelegt wird, soll homogene Zug- oder Druckfläche heißen (z. B. stellt die Seifenblase eine annähernd homogene Zugfläche dar).

Satz. In jeder homogenen Zug- oder Druckfläche ist die flächenhaft gemessene Flächendichte doppelt so groß als die linear gemessene, und alle Schubkomponenten sind Null.

Ist z. B. eine Quadratfläche aus homogenem Material mit der Seite r gegeben, so wird sie zu einer homogenen Zugfläche dadurch, daß man auf jeder Seite des Quadrates und senkrecht zu ihr gleichmäßig verteilte Zugkräfte wirken läßt, wie Figur 4 zeigt.

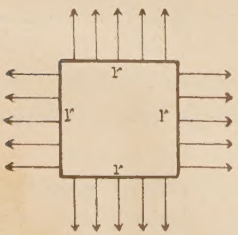

Fig. 4

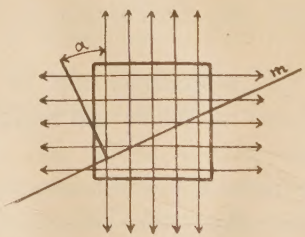

Fig. 5

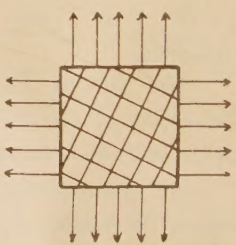
Fig. 6

Ist die linear gemessene Dichte dieser Kräfte gleich A, so wird auf jeder Seite des Quadrates r^2 eine Kraft von der Größe r . A ausgeübt. Die Zahl der das Quadrat von rechts nach links und von oben nach unten durchziehenden Kraftlinien ist dann ebenfalls je gleich r . A. Im ganzen hat man also 2 . r . A . Kraftlinien. Eine jede von ihnen hat die Länge r, so daß man eine Kraftmenge $2r^2 . A$ erhält. Auf die Flächeneinheit des Quadrates r^2 kommen demnach 2 A Kraftlinien.

Legt man aber eine Gerade als Maßlinie parallel zu einer Seite des Quadrates durch das Quadrat hindurch, so schneidet diese r . A Kraftlinien, so daß nur A Kraftlinien auf den Zentimeter der Maßlinie kommen. Die linear gemessene Flächendichte einer homogenen Kraftfläche wird also halb so groß als die flächenhaft gemessene Flächendichte gefunden.

Zur Probe sei in Figur 5 noch eine beliebige schiefe Gerade m als Maßlinie so durch das Quadrat gelegt, daß ihre Normale den Winkel α mit der vertikalen Schar Kraftlinien bildet. Von diesen findet man dann in der Maßlinie die Zahl A $\cos^2\alpha$ auf dem Zentimeter wieder. Von der horizontal verlaufenden Schar findet man dagegen in m die Flächendichte $A \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = A \sin^2\alpha$. Die tatsächlich gefundene lineare Flächendichte ist darum gleich $A.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = A$, also dieselbe wie zuvor. Die Kraftfläche ist tatsächlich homogen und kann ohne Fehler auch von zwei Scharen beliebig andersliegender zueinander senkrechter Kraftlinien durchzogen gedacht werden (Figur 6).

Die Schubkomponenten heben sich fort, weil:
$A(\sin\alpha\cos\alpha + \sin[90^0+\alpha]\cos[90^0+\alpha]) = A(\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha) = 0.$

§ 7.

Homogene Krafträume.

Definition. Ein so gespannter oder gedrückter Raum, in welchem sich die flächenhaft gemessene Raumdichte gleich bleibt, unabhängig davon, in welcher Richtung die Maßfläche hindurchgelegt wird, soll homogener Zug- oder Druckraum heißen (beispielsweise stellt der mit komprimiertem Wasser gefüllte Raum eines Kessels einen homogenen Druckraum dar).

Satz. In einem homogenen Zug- oder Druckraum ist die räumlich gemessene Raumdichte dreimal so groß als die flächenhaft gemessene, und alle Schubkomponenten sind Null.

Würde z. B. ein Würfel von der Kante r von homogenem Material auf allen sechs Begrenzungsquadraten mit Druckkräften von der Dichte B gleichmäßig belastet, so würde in ihm ein homogener Druckraum entstehen und die Zahl aller ihn durchlaufenden Kraftlinien $3r^2 . B$ betragen. Da eine jede derselben die Länge r hat, so ergibt sich in Summa eine Kraftmenge von der Größe $3r^3B$ und in der Raumeinheit 3B. Legt man eine ebene Maßfläche parallel zu einer Seitenfläche durch den Würfel, so schneidet sie im ganzen nur r^2B Kraftlinien, also auf der Flächeneinheit nur B Kraftlinien, d. i. den dritten Teil der räumlich gemessenen Raumdichte.

Auch hier kann man die Probe machen, ob der Kraftraum im Innern des Würfels wirklich homogen ist, indem man eine beliebige schiefe Schnittebene als Maßfläche durch den Würfel hindurchlegt. Man findet dann die flächenhaft gemessene Raumdichte gleich B $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$, was aber wieder gleich B ist. Darum kann auch der homogene Kraftraum von drei Scharen zueinander senkrechter Kraftlinien in ganz beliebiger Richtung durchzogen gedacht werden.

Daß sich auch hier die Schubkomponenten fortheben, kann erst später bewiesen werden.

§ 8.

Streuung der Kraftlinien.

Wird ein Stab gezogen, so werden die Zuglinien in ihm nicht so einfach in Punktreihen verlaufen, wie bisher gedacht wurde, aus dem einfachen Grunde, weil die Massenteilchen nicht in geraden Linien, sondern unregelmäßig verteilt liegen, und sie werden sich nach der verschiedensten Richtung verstreuen. Liegen z. B. einige Teilchen so, wie Figur 7 zeigt, und greifen an den beiden Teilchen 1 und 3 rechts

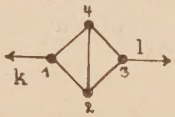

Fig. 7

Fig. 8

und links zwei entgegengesetzt gleiche Zugkräfte k und l an, so wird sich nicht nur 1 von 3 so weit entfernen, bis zwischen ihnen eine hinreichende Anziehungskraft entstanden ist, es wird sich auch gleichzeitig 1 von 2 und 4, und 3 von 2 und 4 so weit entfernen, bis auch zwischen diesen Teilchen Anziehungskräfte entstanden sind. Es folgt, daß sich bei Anwesenheit von 2 und 4 1 von 3 nicht ganz so weit unter Einwirkung der beiden Kräfte k und l entfernt, als es bei deren Abwesenheit geschehen würde. Die vier Teilchen wirken wie eine Hebelkonstruktion aufeinander und verursachen eine Streuung der Kraftlinien zur Seite nach 2 und 4 hin. Außerdem werden sich 2 und 4 so weit einander nähern, bis die Abstoßungskräfte zwischen ihnen groß genug sind, um das Gleichgewicht herzustellen. Wir wollen diese Erscheinung Kraftlinienstreuung nennen und die Größe der Kraftlinienstreuung als das Verhältnis der Dichte der zur Kraftfortpflanzungsrichtung senkrechten Kraftlinien zur Dichte der mit dieser Richtung zusammenfallenden Kraftlinien definieren.

Es wäre Sache einer Wahrscheinlichkeitsrechnung, die sich mit der Struktur der Substanz beschäftigt, aus der ein Stab besteht, die Größe der sich hieraus ergebenden Kraftlinienstreuung zu ermitteln.

Die betrachtete Kraftlinienstreuung würde nur ausbleiben, wenn die Teilchen genau in geraden Linien hintereinander liegen und in denselben Linien die Kraftlinien verlaufen. Dieser Fall mag aber nur in Kristallen vorkommen. Es ist klar, daß die Kraftlinienstreuung von der Struktur des festen Körpers abhängt und eine Veränderung der Struktur auch eine Veränderung der Kraftlinienstreuung nach sich zieht. Z. B. besitzt darum die Stelle einer Einschnürung eines Eisenstabes, die unter Anwendung großer Zugkräfte herbeigeführt wurde, eine größere Festigkeit gegen Zug auf der Flächeneinheit des Querschnittes als die nichteingeschnürten Stellen. Man kann annehmen, daß infolge der Dehnung an Stelle der in Figur 7 angegebenen Struktur eine Struktur von der Form Figur 8 getreten ist, die offenbar eine geringere Streuung der Kraftlinien zur Folge hat. Die geringere Streuung bedingt jedenfalls eine größere Festigkeit desselben Materials (z. B. gezogener Drähte in Längsrichtung).

Es wird übrigens später unsere Aufgabe sein, die Zahlen der Kraftlinienstreuung für ein strukturloses Material zu ermitteln. Das Ergebnis wird selbstverständlich praktisch dadurch beeinträchtigt, daß ein an sich strukturloser Körper bei der geringsten Belastung schon eine Struktur erhält, so daß gewisse Streuungsgesetze nur für Körper großer Festigkeit und bei geringer Belastung gelten können.

§ 9.

Abgeschlossene Kraftsysteme.

Definition. Ein System von Kräften, auf welches von außen keine Kräfte ausgeübt werden, soll ein abgeschlossenes Kraftsystem heißen.

Satz. Befindet sich ein abgeschlossenes Kraftsystem im Gleichgewicht, so wird jede seiner Drucklinien von einer Zuglinie und, was wieder dasselbe ist, jede seiner Zuglinien von einer Drucklinie geschlossen. Jede beliebige, durch das abgeschlossene Kraftsystem gelegte, ebene Maßfläche schneidet ebensoviele Zug- als Drucklinien.

Dieser Satz folgt vorläufig unmittelbar aus der in § 2a genannten Gleichgewichtsbedingung, die sich auf beliebige, aus einem System herausgeschnittene, endliche Stücke bezieht, und bedarf für jetzt nur einer Illustrierung, zumal er, insbesondere in seinem ersten Teil, erst später anderweitig bewiesen werden soll.

Durchschneidet man einen auf Biegung beanspruchten Balken (Figur 9) an einer beliebigen Stelle mit einer zu ihm senkrechten ebenen Maßfläche m, so muß man in dieser ebensoviel Zug- als Drucklinien

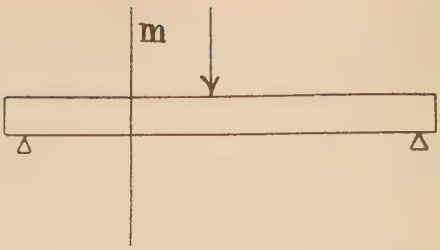

Fig. 9

zählen können, wenn Gleichgewicht sein soll. Denn unter Einwirkung eines Ueberschusses von Zuglinien würde sich der Balken soweit verkürzen, bis der Ueberschuß verschwindet und sich das Gleichgewicht einstellt. Unter Einwirkung eines Ueberschusses von Drucklinien würde er sich entsprechend strecken.

Der in § 2 angeführte Satz von den Drehmomenten kann an diesem System nicht veranschaulicht werden, weil auf es von außen Kräfte einwirken, d. h. weil es nicht abgeschlossen ist. Ein abgeschlossenes System würden z. B. zwei Balken (Figur 10) darstellen, zwischen die zwei Klötze a und b gelegt und die mit einem Seil c zusammengespannt sind. Wird durch dieses System eine beliebige schiefe ebene Maßfläche m_1 gelegt, so muß in dieser ebenso wie vor-

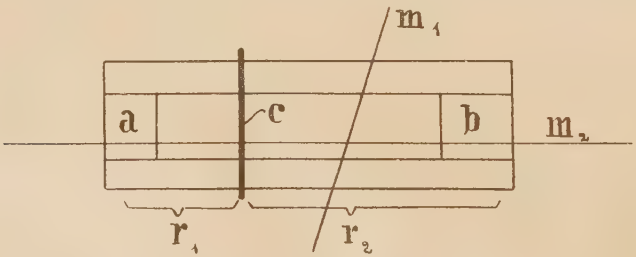

Fig. 10

hin die Zahl der Zug- und die der Drucklinien gleich groß gefunden werden, außerdem aber müssen jetzt die von den Kraftlinien ausgeübten Drehmomente in Summa gleich Null sein. Andernfalls müßte sich das System nach der einen oder andern Seite hin krümmen, bis das Gleichgewicht gefunden ist. Eine Maßfläche m_2 würde die Drucklinien in a und b und die Zuglinien in c schneiden. Hätten diese die Größe A, B und C, so müßte im Gleichgewichtsfalle $A + B = C$ und $(+r_1) . A + (-r_2) . B + 0 . C = 0$ sein.

Würde ein Dampfkessel (Figur 11) beliebiger Form von einer beliebigen ebenen Maßfläche geschnitten, so müßte ebenfalls die Zahl A der Zuglinien gleich der Zahl B der Drucklinien sein. Erstere sind

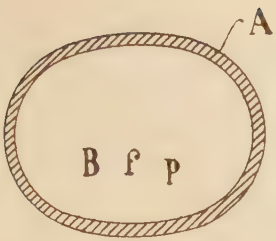

Fig. 11

in der Kesselwand, letztere im Innenraum zu finden. Wird der Innenraum in der Fläche f geschnitten und ist der Druck im Kessel p, so ist $B = f.p$, und, da $A = B$, auch $A = f.p$. Außerdem müssen die von den Zug- und Drucklinien ausgeübten Drehmomente in Summa gleich Null sein.

Speziell mit Rücksicht auf das Gleichgewicht der Drehmomente spricht sich Satz 9 so aus:

§ 10.

Satz. Legt man durch ein abgeschlossenes, sich im Gleichgewicht befindendes, Kraftsystem eine beliebige ebene Maßfläche, und macht die Fiktion, daß man jedem Punkt der Maßfläche, der als Schnittpunkt einer Kraftlinie mit der Maßfläche erscheint, das Gewicht der Krafteinheit beilegt, jedoch so, daß man den Gewichten, die man den geschnittenen Zuglinien beilegt, das entgegengesetzte Vorzeichen gibt, als den Gewichten, die man den geschnittenen Drucklinien beilegt, so wird das sich ergebende Gewicht in Summa gleich Null gefunden, und der Schwerpunkt der negativen Gewichte fällt mit dem der positiven zusammen in einen Punkt.

Nach dem unter § 3 bis 7 Gesagten werden in jeder Maßfläche nur diejenigen Komponenten der von ihr durchschnittenen Kraftlinien berücksichtigt, die senkrecht zu ihr stehen. Denkt man sich darum das beliebige System von der Maßfläche wahrhaft durchschnitten, so daß diese selbst als die einseitige Begrenzungsfläche des einen Teiles des Systems erscheint, so sind (in der Vorstellung) von außen auf dieser Fläche zur Wiederherstellung des früheren Gleichgewichts an den Stellen, wo Zuglinien durchschnitten wurden, senkrechte Zugkräfte, und wo Druckkräfte durchschnitten wurden, senkrechte Druckkräfte anzubringen. Nun kann an Stelle dieser, zueinander parallelen und zur Maßfläche senkrechten Zug- bez. Druckkräfte je eine resultierende Zug- bez. Druckkraft angebracht werden, die ihrer Summe gleich ist und in dem in der Maßfläche konstruierten Schwerpunkt aller Angriffspunkte dieser Zug- bez. Druckkräfte angreift. Das Gleichgewicht

kommt dann offenbar nur zustande, wenn die beiden Resultierenden einander entgegengesetzt gleich sind und in ein und dieselbe Gerade fallen, d. h. einen gemeinsamen Angriffspunkt auf der Maßfläche haben. Das ist aber gleichbedeutend mit dem Gesagten, und die Fiktion der Gewichtsbeilegung dient nur der besseren Anschauung.

Aus Satz 10 folgt weiter:

§ 11.

Allgemeine Gleichgewichtsbedingung abgeschlossener Kraftsysteme.

Ein abgeschlossenes Kraftsystem befindet sich dann im Gleichgewicht, wenn die Druckkraftmengen gleich den Zugkraftmengen sind und deren Schwerpunkte zusammen in einen Punkt fallen.

Beweis. Man kann sich jedes abgeschlossene Kraftsystem durch unendlich viele parallele ebene Maßflächen in unendlich viele einzelne unendlich dünne Schichten zerschnitten denken. Befindet es sich im Gleichgewicht, so fällt nach § 10 in jeder dieser einzelnen Schichten der Schwerpunkt der gefundenen Zuglinien mit dem der Drucklinien zusammen, und es sind die den beiden Schwerpunkten zugeordneten Zug- und Druckkraftmengen einander gleich. Das gilt von jeder Schicht, folglich auch von ihrer Summe. Der gemeinsame Schwerpunkt der Zugkraftschwerpunkte aller einzelnen einander parallelen Schichten muß mit dem entsprechenden gemeinsamen Druckkraftschwerpunkt zusammenfallen, und es werden auch die, diesen beiden gemeinsamen Schwerpunkten zugeordneten, Zug- bez. Druckkraftmengen einander gleich sein (nach dem Satze: sind alle Teile zweier Ganzen einander gleich, dann sind auch die Ganzen einander gleich).

Führt man nun diese gedachte Zerschneidung des Systems nach drei zueinander senkrechten Richtungen aus, so wird jedes beliebige Teilchen einer Zug- oder Drucklinie dreimal berücksichtigt. Hatte es ursprünglich die Größe ε (wobei ε als das Produkt der Kraftlinie mit ihrem kleinen in Betracht gezogenen Längenteilchen aufgefaßt wird, d. h. als ein Kraftmengenpartikelchen, wie es die Vorstellung räumlich verlaufender mechanischer Kraftlinien erfordert), so wird es nach einer in § 4 gegebenen Darlegung einmal als $\varepsilon . \cos^2\alpha$, einmal als $\varepsilon . \cos^2\beta$ und einmal als $\varepsilon . \cos^2\gamma$ berücksichtigt, wenn das Kraftlinienteilchen mit den drei zueinander senkrechten Koordinatenachsen, die den drei Schnittrichtungen zugeordnet sind, die Winkel α, β und γ bildet. Die Summe der drei Berücksichtigungen ergibt aber den Wert des Teilchens selbst ($\varepsilon[\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma] = \varepsilon . 1 = \varepsilon$). Folglich wird die Summe

aller drei Scharen von Berücksichtigungen die Gesamtkraftmengen selbst ergeben. Da nun alle Teile der Zugkraftmengen den entsprechenden Teilen der Druckkraftmengen gleich waren, so werden auch die Zug- und Druckkraftmengen selbst einander gleich sein.

Hiermit ist die erste Hälfte des Satzes 11 bewiesen. Die Folgerung ergab sich einfach mit Hilfe des Satzes, daß die Ordnung der Summanden beliebig ist. Die zweite Hälfte von 11 wird mit Hilfe desselben Satzes bewiesen. Er erfährt dabei nur die Anwendung auf das Räumliche und erhält den Sinn, daß es für die Auffindung eines Schwerpunktes eines Systems gleichgültig ist, ob und in welcher Reihenfolge man erst partielle Schwerpunkte von Teilen des Systems bildet, und von diesen Schwerpunkten wieder den gemeinsamen Schwerpunkt, oder ob man gleich den gemeinsamen Schwerpunkt des ganzen Systems bildet.

Für jeden der drei vorgenommenen, zueinander senkrechten, Schnitte des Systems wurde gefunden, daß die beiden Schwerpunkte der Zug- und Druckkraftmengen zusammenfallen. Wir erhielten sechs Schwerpunkte, die paarweise zusammenfielen und deren Werte paarweise einander gleich waren. Es folgt hieraus, daß auch der gemeinsame Schwerpunkt der drei Zugkraftschwerpunkte mit dem gemeinsamen Schwerpunkt der drei Druckkraftschwerpunkte zusammenfallen muß und daß deren Werte einander gleich sind, und außerdem nach obigem Satze, daß die beiden gemeinsamen Schwerpunkte mit den beiden Hauptschwerpunkten der gesamten Zug- und Druckkraftmengen identisch sind.

Im folgenden sei nun ermittelt, in welcher Weise sich die Zug- und Drucklinien schließen:

§ 12.

Die Krümmung mechanischer Kraftlinien.

Satz. Soll Gleichgewicht bestehen, so müssen auf jede Zuglinie, die die Krümmung $\frac{1}{r}$ hat (wobei r den Krümmungsradius bedeutet), auf der Längeneinheit $\frac{1}{r}$ radial nach außen gerichtete Krafteinheiten, und auf jede Drucklinie, die die Krümmung $\frac{1}{r}$ hat, auf der Längeneinheit $\frac{1}{r}$ radial nach innen gerichtete Krafteinheiten ausgeübt werden. Diese Krafteinheiten können je sowohl von endigenden Zug- als Drucklinien herrühren.

Ist z. B. eine kreisförmige Reihe von Punkten gegeben (Figur 12), deren jeder sich mit seinem Nachbarpunkte in fester Verbindung befindet, so können nur dann zwischen den Punkten Zugkräfte bestehen, wenn auf sie radial nach außen gerichtete Kräfte ausgeübt werden. Andernfalls zieht sich die Punktreihe zusammen, um das Gleichgewicht einzunehmen. Dabei ist es gleichgültig, ob man von außen Zugkräfte auf die Peripherie des Kreises wirken läßt, oder Druckkräfte von innen, wie in Figur 13. Das letztere kann man sich z. B. dadurch entstanden

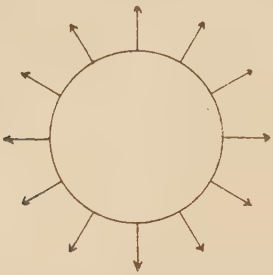

Fig. 12

Fig. 13

denken, daß die vom Kreis umspannte Fläche eine homogene Druckfläche ist. Hat diese die lineare Flächendichte A (oder die flächenhaft gemessene 2 A, § 6) und legt man einen Durchmesser als Maßlinie durch das System, so werden im Innern des Kreises 2 r A Drucklinien geschnitten. Soll Gleichgewicht sein, so muß der Durchmesser auch 2 r A Zuglinien schneiden. Diese letzteren können nur in der Peripherie verlaufen, folglich, da die Maßlinie die Peripherie zweimal schneidet, laufen A . r Zuglinien in der Peripherie entlang. Man findet also, daß A . r Zuglinien von der Krümmung $\frac{1}{r}$ radial nach außen gerichtete Kräfte von der linearen Flächendichte A beanspruchen, also jede einzelne, radial nach außen gerichtete Kräfte von der linearen Flächendichte $\frac{1}{r}$ beansprucht*).

Ein entsprechender räumlicher Beweis sei noch gegeben. Ein homogener Druckraum von der flächenhaft gemessenen Raumdichte B (oder von der räumlich gemessenen Raumdichte 3 B, § 7) sei von einer gespannten Kugeloberfläche mit dem Radius r umschlossen. Wird

*) Durch dies Gesetz wird z. B. auch folgende Aufgabe gelöst. Um eine Rolle (Figur 13a) ist eine Schnur gelegt, deren Spannung gleich P kg beträgt. Welche Kraft wird von der Schnur auf den Zentimeter der Länge der Rollennut ausgeübt? Antwort: die Kraft $\frac{P}{r}$ kg/cm, wenn r der Radius der Rolle in Zentimetern ist.

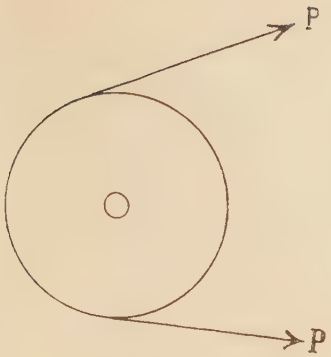

Fig. 13a

das ganze System von einer Hauptschnittebene als Maßfläche geschnitten, so durchschneidet sie $r^2\pi B$ Drucklinien des Raumes, also auch $r^2\pi B$ Zuglinien, die in der Kugeloberfläche verlaufen, wenn Gleichgewicht sein soll. Die linear gemessene Flächendichte der Kugeloberfläche beträgt demnach $\frac{r^2 . B . \pi}{2 . r . \pi}$ d. i. $\frac{1}{2} B . r$, und die flächenhaft gemessene Flächendichte der Kugeloberfläche also $C = B . r$ (§ 6).

Da nun diese auf einem Quadratzentimeter der Kugeloberfläche vorhandenen $B r$ Zuglinien sämtlich die Krümmung $\frac{1}{r}$ haben und auf ihnen im Gleichgewichtsfalle jene B Druckkraftlinien des inneren Kugelraumes endigen, so ist folgender Ansatz gültig: $B . r$ Zuglinien von der Krümmung $\frac{1}{r}$ beanspruchen zum Gleichgewicht B auf ihnen endigende Drucklinien, d. h. eine Zuglinie von der Krümmung $\frac{1}{r}$ beansprucht auf ihr endigende Drucklinien von der Größe $\frac{1}{r}$ auf dem Zentimeter ihrer Länge.

Satz 12 ist, wie später folgt, allgemein gültig, und man könnte mit seiner Hilfe z. B. auch die Dichte der auf einer doppelt gekrümmten homogenen Kraftfläche endigenden Zug- oder Drucklinien finden. Sind die Krümmungsradien an einer Stelle dieser Fläche r_1 und r_2, so ergibt sich $B = \frac{1}{2} C \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$. (Die C Kraftlinien der Fläche werden in zwei zueinander senkrechte Scharen Kraftlinien zerlegt gedacht [nach § 6] von der linear gemessenen Dichte $\frac{1}{2} C$, so daß die eine Schar die Krümmung $\frac{1}{r_1}$, die andere die Krümmung $\frac{1}{r_2}$ hat. B stellt dann die auf den Quadratzentimeter der Fläche wirksamen Kräfte dar.)

B würde offenbar Null werden, wenn $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ gleich Null würde. Hieraus würde folgen $r_1 = r_2$, d. h. eine pseudosphärische homogene Kraftfläche würde keiner zu ihr senkrechten Kräfte zum Gleichgewicht bedürfen. Das Gesetz $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=0$ bezieht sich deshalb z. B. auf eine innerhalb eines beliebig geformten Drahtringes gespannte Seifenblase.

§ 13.

Endigende Kraftlinien.

Aus Satz 12 wird geschlossen: Auf die auf die Raumeinheit bezogene Kraftmenge Ψ entfällt eine Zahl $\Psi . \int \frac{1}{r} . dv$ endigender Kraftlinien, worin r den Krümmungsradius eines jeden Kraftlinienteilchens, dv das Volumenelement der betreffenden Stelle des Raumes bedeutet und das Integral als eine geometrische Summe aufgefaßt ist.

Die mechanischen Kraftlinien haben also Stellen der Versickerung und Quellung im Raume. Diese sind proportional a) der Zahl und b) der Krümmung der Kraftlinien. Die solenoidale Bedingung gilt nicht für die mechanischen Kraftlinien.

§ 14.

In unveränderter Gesamtzahl verlaufende Kraftlinien.

Mechanische Kraftlinien verlaufen nur dann ihrer Länge nach in unveränderter Gesamtzahl, wenn alle anderen Kraftlinien, von denen sie senkrecht oder schief geschnitten werden, entweder die Größe Null oder die Krümmung Null besitzen. Andernfalls müssen sie teilweise auf den Kraftlinien endigen, von denen sie geschnitten werden. Hiervon gibt es nur spezielle Ausnahmen, wie z. B. die pseudosphärische Fläche (§ 12).

§ 15.

Beispiele.

An den in § 12 ausgeführten Spezialfällen kann die Richtigkeit der in § 11 aufgestellten Gleichgewichtsbedingung nachgeprüft werden. Die Kreisfläche unter § 12 beträgt $r^2 . \pi$. Auf jede Flächeneinheit entfiel eine Druckkraftmenge 2 A. Die Druckkraftmenge der Kreisfläche ist also $2 A . r^2 . \pi$. Auf die Längeneinheit der Peripherie ($= 2 r \pi$) entfiel eine Zugkraftmenge A . r. Die Zugkraftmenge ist also $2 A . r^2 . \pi$. Die Zug- und Druckkraftmengen sind also einander gleich. Ihre beiden Schwerpunkte fallen selbstverständlich gemeinsam in das Zentrum des Kreises.

Der Kugelinhalt beträgt $\frac{4}{3}\pi . r^3$. Auf jede Raumeinheit entfiel eine Druckkraftmenge 3B. Die Druckkraftmenge in der Kugel ist also $4 . r^3 . B . \pi$. Die Kugeloberfläche beträgt $4 . r^2 . \pi$. Auf ihre Flächeneinheit entfiel die Zugkraftmenge B.r. Die Zugkraftmenge auf der Kugel ist also $4 . r^3 . B . \pi$, also gleich der Druckkraftmenge in der Kugel. Auch hier fallen die beiden Schwerpunkte gemeinsam in das Zentrum der Kugel.

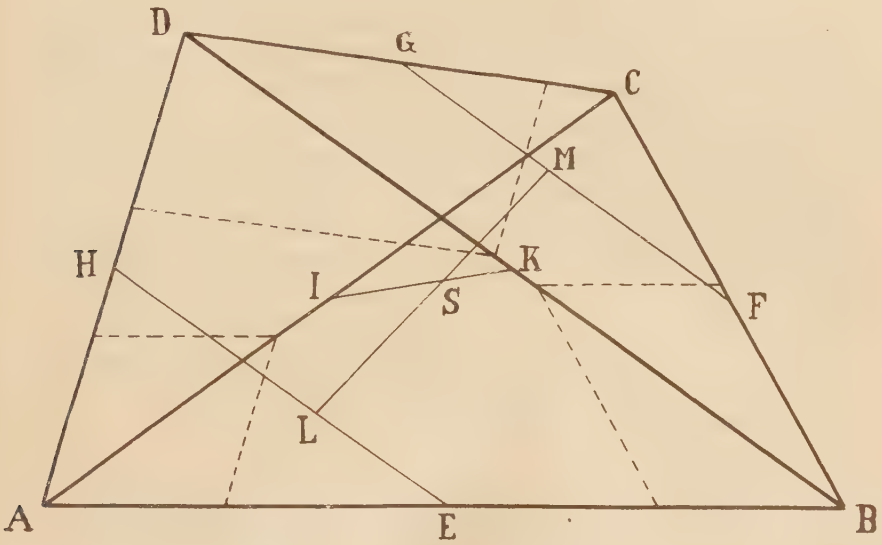

Fig. 14

Es ist leicht, die Richtigkeit des § 11 auch an beliebigen anderen einfachen Gebilden nachzuweisen, z. B. an einem beliebigen aus Stäben und Seilen zusammengesetzten abgeschlossenen System, dessen Stäbe Druckkräfte und dessen Seile Zugkräfte so fortpflanzen, daß die Zug- und Druckkräfte im Gleichgewicht sind. In Figur 14 ist ein beliebig gewähltes Viereck A B C D angenommen worden, dessen Diagonalen als Stäbe und dessen Seiten als Seile gedacht werden. Zur Ermittelung der Kräfte im Gleichgewichtsfalle wurde die im Stab BD entlang laufende Druckkraft gleich 50 g angenommen und durch Auftragung von 50 mm von B und D aus auf BD angegeben. Durch Parallelverschiebung wurden dann die Größen der in den Seilen AB, BC, CD und DA entlang laufenden Zugkräfte, sowie der in AC entlang laufenden Druckkraft gefunden. Es ergab sich:

	Für die Zuglinien in:				Für die Drucklinien in:		
	Zahl g	Länge mm	Kraftm. g.mm		Zahl g	Länge mm	Kraftm. g.mm
AB:	23,5	106,5	2502,8	AC:	39	93,5	3646,5
BC:	33,6	63,2	2123,5	BD:	50	107,5	5375,0
CD:	48,0	57,0	2736,0				
DA:	24,0	65,6	1596,0				
			8958,3				9021,5

Die gefundenen Zug- und Druckkraftmengen stimmen mit einer Genauigkeit von 0,7 % überein. Dieser Fehler entspringt der Ungenauigkeit der Zeichnung. Werden die einzelnen Strecken berechnet, so lassen sich beliebig viele Stellen der Zahlen für die Zug- und Druckkraftmengen in Uebereinstimmung bringen.

Ferner wurden die Schwerpunkte bestimmt. Die Schwerpunkte der Kraftmengen der sechs Strecken liegen selbstverständlich in ihren Mitten EFGHIK. Der Schwerpunkt S der Zugkraftmenge wurde gefunden durch Teilung der Strecke EH im Verhältnis 2502,8 zu 1596 im Punkt L und der Strecke FG im Verhältnis 2123,5 zu 2736 in M und durch Teilung von ML im Verhältnis 4859,5 : 4098,8 in S. Wie ersichtlich, liegt S sehr genau auf der Geraden IK und teilt diese sehr genau im verlangten Verhältnis 3646,5 zu 5375. – An räumlichen Gebilden läßt sich Satz 11 entsprechend erweisen.

§ 16.

Ersatz mathematischer Stäbe und Seile durch mechanische. Absolute Größe der Kraftmenge.

Ersetzt man in Figur 14 irgendeine der Kraftlinien, z. B. das Seil AD oder den Stab AC durch irgendein komplizierteres Gebilde, z. B. wieder durch ein Polygon mit so und so vielen Diagonalen, so muß nach § 11 die Summe aller Kraftmengen im Gleichgewichtsfalle wieder gleich Null sein. Da sich aber im System Figur 14 dabei sonst nichts ändern soll, so ist die Kraftmenge im übrigen System, soweit seine Teile nicht ausgetauscht wurden, dieselbe geblieben. Das eingetauschte Seil (bez. Stab) muß also die übrige Kraftmenge wieder zu Null ergänzen, d. h. das eingetauschte Seil (bez. Stab) muß dieselbe Kraftmenge enthalten wie das ausgetauschte. Dies gilt ebenso wie folgendes: Hat man das Gesetz, daß eine Summe Null sei, so muß jeder Summand immer durch einen ihm gleichen Summanden ersetzt werden, wenn das Gesetz gültig bleiben soll und wenn alle andern Summanden die ursprünglichen bleiben sollen. Diese Schlußfolgerung

läßt sich auch auf das komplizierteste Spannstück (bez. Stütze) anwenden, das in Figur 14 als Ersatz eingeführt werden soll. Darum gilt sie auch für physische, mechanische Spannstücke (bez. Stützen). Diese sind nur sehr kompliziert gegenüber den mathematischen, wenn man die einzelnen Kräfte zwischen allen Molekülen in Betracht ziehen wollte. Bei obiger Schlußweise ist dies aber überflüssig. Die Kraftmenge bleibt unverändert und ist immer gleich dem Produkt der fortgepflanzten Kraft mal dem Abstand der Spann- bez. Stützpunkte.

Dieselbe Betrachtung gilt für die Schwerpunkte der Kraftmengen. In einem noch so komplizierten Spannstücke (bez. Stütze), z. B. in einem gebogenen Spannstück, an dessen innerem Rande Zuglinien und an dessen äußerem Rande Drucklinien entstehen, liegt der Schwerpunkt der Kraftmenge immer an derselben Stelle als der Schwerpunkt der Kraftmenge in dem einfachsten Spannstück (bez. Stütze), d. h. in der Geraden und darum immer in der Mitte zwischen den Spann- und Stützpunkten. Es gilt das Gesetz, daß die Kraftmenge und die Lage ihres Schwerpunktes in Spannstücken und Stützen unabhängig ist von der Form der Spannstücke und Stützen*).

§ 17.

Feld einer mit Elektrizität geladenen Kugel.

An Hand der §§ 10 bis 12 läßt sich bestimmen, ob sich der mit solenoidal verlaufenden elektrischen (oder auch magnetischen) Kraftlinien erfüllte Raum im Gleichgewicht befindet. Wir betrachten zunächst den Raum, der eine mit der Elektrizitätsmenge E geladene Metallkugel vom Radius r_0 umgibt. Die elektrischen Kraftlinien strahlen nach heutiger Auffassung von der Kugel aus nach allen Seiten gradlinig in den Raum. Ihre Zahl ist $\frac{4\pi E}{K}$, ihre Dichte im Abstand r

*) Ebenso könnte man aus § 11 schließlich folgendes über den Rahmen der vorliegenden Abhandlung hinausgehendes Stabilitätsgesetz für abgeschlossene Kraftsysteme aufstellen: $\frac{dL}{dr}$ = negativ, worin L die Gesamtkraftmenge (Druckkraftmenge = positiv gesetzt) und dr die Verschiebung eines beliebigen Punktes des Systems bezeichnet. Wegen dieses Gesetzes ist z. B. das Viereck Figur 14 stabil, wie es in § 15 beschrieben ist. Bestünden aber seine Diagonalen aus Seilen, seine Seiten aus Stäben, so wäre es labil, weil man, falls sich seine Diagonalen voneinander um dr abheben würden, zwischen ihnen die Zugkraftmenge $-dL$ anbringen müßte, um das im System bei der Verschiebung dr entstehende $+dL$ zu kompensieren. Vergleiche die labile Umkippungserscheinung an Fahrradrädern, deren Umfang bekanntlich aus einem Stab und deren Speichen aus Seilen bestehen.

vom Kugelzentrum also $F = \frac{E}{K \cdot r^2}$. Dabei ist nach Maxwell der Zwangszustand einerseits derartig, daß in der Richtung der elektrischen Kraftlinien Zuglinien von der flächenhaft gemessenen Raumdichte $\frac{K}{8\pi} \cdot F^2 = \frac{K}{8\pi} \cdot \left(\frac{E}{K \cdot r^2}\right)^2$ verlaufen, d. i. $\frac{E^2}{8\pi K r^4}$ *).

Eine konzentrische Kugeloberfläche vom Radius r wird darum von $\frac{E}{2Kr^2}$ Zuglinien durchsetzt. Wie die Variable $\frac{1}{r^2}$ hierbei besagt, laufen die Zuglinien nicht unverändert durch den Raum. Es endigen von ihnen in jeder konzentrischen Kugelschale vom Radius r und der Dicke dr: $\frac{-E^2 \cdot dr}{Kr^3}$, auf dem Quadratzentimeter der Oberfläche der Kugelschale also: $\frac{E^2 dr}{4\pi K r^5}$.

Andererseits ist nach Maxwell unter Anwendung der Bezeichnungen der vorliegenden Abhandlung eine jede dieser Kugelschalen eine homogene Druckfläche von der linear gemessenen Dichte $\frac{E^2 \cdot dr}{8\pi K r^4}$, oder, was dasselbe ist, von der flächenhaft gemessenen Dichte $\frac{E^2 dr}{4\pi K r^4}$ (§ 6). Die Zahl $\frac{E^2 \cdot dr}{4\pi K r^4}$ stellt auch die im Volumen 1 cm . 1 cm . dr cm enthaltene Druckkraftmenge dar. Da deren Kraftlinien durchweg die Krümmung $\frac{1}{r}$ besitzen, beansprucht sie nach § 13 zum Gleichgewicht endigende Zuglinien von der absoluten Zahl $\frac{E^2 \cdot dr}{4\pi K r^5}$. Da dieser Wert mit dem obigen übereinstimmt, befindet sich der Maxwellsche Raum also im mechanischen Gleichgewicht.

Im Außenraum befindet sich eine Zugkraftmenge von der Größe:

$$\sum_a A = \int_{r_0}^{\infty} \frac{E^2 dr}{2Kr^2} = \frac{E^2}{2Kr_0}$$

und eine Druckkraftmenge von der Größe:

$$\sum_a B = \int_{r_0}^{\infty} \frac{E^2 dr}{Kr^2} = \frac{E^2}{Kr_0},$$

*) Siehe Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie, Seite 374. Uebrigens sind die hier und in § 18 angegebenen Werte in Dyn, bez. $\frac{\text{Dyn}}{\text{cm}}$ usw. zu messen, wenn die elektrischen bez. magnetischen Größen nach absolutem Maß gemessen werden.

in Summa also eine Kraftmenge:

$$\sum_{a}(B-A)=\frac{E^2}{2Kr_o}.$$

Im Gleichgewichtsfalle soll nun nach § 11 die gesamte Kraftmenge gleich Null sein. Die Formel ist also noch zu ergänzen. Die Beobachtung, daß weder den auf der Metallkugeloberfläche verlaufenden gekrümmten Drucklinien noch den auf ihr von außen endigenden Zuglinien nach dem Bisherigen ein Gleichgewicht gehalten wird, ergibt, daß beide zum Gleichgewicht Kräfte bedürfen, welche die Kugeloberfläche zusammenhalten, und zwar nach § 12, von der Gesamtzahl $\frac{E^2}{2Kr_o^2}+\frac{E^2\,dr}{Kr_o^3}$, wenn die Oberfläche die Dicke dr hat. Mit dieser aber verschwindet das zweite Glied, und man erhält als Oberflächendruck $\frac{E^2}{8\pi Kr_o^4}$ auf dem Quadratzentimeter, der entweder von dem die Kugel umgebenden Medium als Druck von außen, oder von der Metallmasse der Kugel als Zug von innen geleistet werden muß. Im letzteren Falle würde (wäre die Kugel massiv) ein homogener Zugraum in der Kugel entstehen von der räumlichen Dichte $\frac{3E^2}{8\pi Kr_o^4}$, was eine Zugkraftmenge $\frac{4r_o^3\pi}{3}\cdot\frac{3E}{8\pi Kr_o^4}=\frac{E}{2Kr_o}$ ergibt. Dieser Wert ergibt sich im ersteren Falle, sowie auch im zweiten, und das sogar auch, wenn die Kugel nicht massiv ist, wenn auch nicht auf eine so einfache Weise. Darum gilt $\sum_{i}(B-A)=\frac{-E^2}{2Kr_o}$. So trifft denn das Gleichgewicht $\sum_{a}+\sum_{i}=0$ zu.

§ 18.

Direkte Ableitung des Coulomb'schen Gesetzes auf mechanischem Wege aus dem Maxwell'schen Zwangszustand.

Wir betrachten jetzt das Feld zweier mit Elektrizität geladener Kugeln, deren Abstand voneinander R beträgt. Wenn sich hier die mechanischen Zwangszustände einfach übereinander lagern sollten, so würde offenbar keine Anziehung bez. Abstoßung der beiden Kugeln zustande kommen. Nach Maxwell trifft dies aber nicht zu. Nach ihm gilt dies nur von der Uebereinanderlagerung magnetischer und elektrischer Felder, und diese üben deshalb im Ruhezustand auch keine wechselseitigen Kräfte aufeinander aus. Zwei elektrische, ebenso wie zwei magnetische Felder lagern sich jedoch nicht einfach übereinander. In diesem Falle ist für jeden Raumpunkt die Vektorsumme $\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_1\overset{\wedge}{+}\mathfrak{E}_2$

bez. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \hat{+} \mathfrak{H}_2$ zu bilden. Dann erst ist mit der Richtung der $\mathfrak{E}$ bez. $\mathfrak{H}$ die Richtung der Schar verlaufender Zuglinien bestimmt und senkrecht zu ihnen zwei zueinander senkrechte Scharen ebenso dichter Drucklinien, wobei die flächenhaft gemessene Dichte dieser drei Scharen nach Maxwell immer den Wert $\frac{K}{8\pi}(\mathfrak{E})^2$ bez. $\frac{\mu}{8\pi}(\mathfrak{H})^2$ besitzt.

Hierdurch ist der gesamte Kraftlinienverlauf bestimmt, und man kann die Richtigkeit der Maxwell'schen Behauptung nachprüfen. In den Punkten P und Q der Figur 15 mögen sich zwei kleine Kugeln befinden mit den elektrischen Ladungen E_1 und E_2. Legt man durch die Gerade PQ eine senkrechte unendliche ebene Maßfläche m, z. B. durch den Punkt A, so braucht man nur die Beanspruchung eines jeden Elementes dieser Fläche auf Zug und Druck zu bestimmen und dann über die Fläche zu integrieren, wenn man die Anziehungs- bez. Abstoßungskräfte finden will.

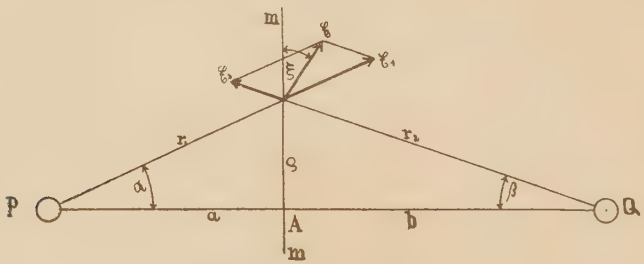

Fig. 15

Im beliebigen Punkt B der Fläche ist nach Maxwell $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \hat{+} \mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_1 = \frac{E_1}{K \cdot r_1^2}$ und $\mathfrak{E}_2 = \frac{E_2}{K \cdot r_2^2}$. Die Komponente von $\mathfrak{E}$ senkrecht zu m ist: $\mathfrak{E} \cdot \sin\xi = \mathfrak{E}_1 \cdot \cos\alpha - \mathfrak{E}_2 \cdot \cos\beta$, und die in m verlaufende: $\mathfrak{E} \cdot \cos\xi = \mathfrak{E}_1 \cdot \sin\alpha + \mathfrak{E}_2 \cdot \sin\beta$, woraus folgt $(\mathfrak{E})^2 = (\mathfrak{E}_1 \cdot \cos\alpha - \mathfrak{E}_2 \cdot \cos\beta)^2 + (\mathfrak{E}_1 \cdot \sin\alpha + \mathfrak{E}_2 \cdot \sin\beta)^2$. Nun ist nach Maxwell und nach § 6 zu setzen: die Zugbeanspruchung in B senkrecht zu m:

$$Z - \frac{K}{8\pi}(\mathfrak{E})^2 \cdot \sin^2\xi = \frac{K}{8\pi} \cdot (\mathfrak{E}_1 \cdot \cos\alpha \quad \mathfrak{E}_2 \cdot \cos\beta)^2$$

und die Druckbeanspruchung in B senkrecht zu m:

$$D = \frac{K}{8\pi}(\mathfrak{E})^2 \cdot \cos^2\xi = \frac{K}{8\pi} \cdot (\mathfrak{E}_1 \cdot \sin\alpha + \mathfrak{E}_2 \cdot \sin\beta)^2.$$

Die dritte Schar Kraftlinien (Drucklinien) verläuft ganz in m, ergibt darum keine Beanspruchung senkrecht zu m. In Summa ist also die

Kraft Q auf dem Quadratzentimeter: $Q = D - Z = \frac{K}{8\pi}\{(\mathfrak{E}_1)^2 . \sin^2\alpha - (\mathfrak{E}_1)^2\cos^2\alpha + (\mathfrak{E}_2)^2\sin^2\beta - (\mathfrak{E}_2)^2\cos^2\beta + 2\mathfrak{E}_1 . \mathfrak{E}_2 . (\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)\}$. Berechnet man die ersten zwei Glieder der rechten Seite, so kommt:

$$Q_1 = \frac{K}{8\pi}\cdot\left(\frac{E_1^2\sin^2\alpha}{K^2 . r^4} - \frac{E_1^2\cos^2\alpha}{K^2 . r^4}\right) = \frac{E_1^2}{8\pi K}\cdot\frac{(\varrho^2 - a^2)}{(\varrho^2+a^2)^3}$$

worin ϱ und a die Strecken AB und AP der Figur 15 bedeuten. Bei Integration folgt:

$$\Sigma Q_1 = \frac{E_1^2}{8\pi K}\cdot\int_{\varrho=0}^{\varrho=\infty} 2\pi\varrho\cdot d\varrho\cdot\frac{\varrho^2 - a^2}{(\varrho^2+a^2)^3}.$$

Setzt man $\varrho^2 + a^2$ gleich t^2, so kommt $\varrho^2 = t^2 - a^2$ und $\varrho\, d\varrho = t\, dt$, und es folgt:

$$\Sigma Q_1 = \frac{E_1^2}{4K}\cdot\int_{t=a}^{t=\infty} t\,dt\left(\frac{t^2}{t^6} - \frac{2a^2}{t^6}\right),$$

wobei das Integral:

$$1\int_{t=a}^{t=\infty}\frac{dt}{t^3} \quad 2a^2\int_{t=a}^{t=\infty}\frac{dt}{t^5} = \frac{\frac{1}{2}}{a^2} \quad \frac{\frac{1}{2}}{a^2} - 0.$$

Also wird auch $\Sigma Q_1 = 0$. Dies Resultat hätte man voraussehen können, da die beiden integrierten Glieder dieselbe Größe haben, als ob sie ausschließlich von einem nur von der Ladung E_1 in P herrührenden Felde stammten. Von diesem Felde wurde aber schon in § 17 gefunden, daß es sich im Gleichgewicht befindet, und es mußte darum nach § 10 die Gesamtbeanspruchung der Maßfläche m Null sein.

Ganz entsprechend wird die über die Glieder:

$$(\mathfrak{E}_2)^2 . \sin^2\beta - (\mathfrak{E}_2)^2 . \cos^2\beta$$

ausgeführte Integration gleich Null, und es bleibt ausschließlich über das letzte Glied der Gleichung zu integrieren:

$$Q = \frac{K}{8\pi}\cdot(2\mathfrak{E}_1 . \mathfrak{E}_2 . \sin\alpha . \sin\beta + 2\mathfrak{E}_1 . \mathfrak{E}_2 . \cos\alpha . \cos\beta)$$

$$= \frac{K}{8\pi}\cdot\frac{2E_1 . E_2}{K(a^2+\varrho^2) . K . (b^2+\varrho^2)}\cdot\frac{\varrho^2 + ab}{\sqrt{a^2+\varrho^2}\ \sqrt{b^2+\varrho^2}}.$$

Bei Integration folgt:

$$\Sigma Q = \frac{E_1 . E_2}{4\pi K}\int_{\varrho=0}^{\varrho=\infty} 2\pi\varrho . d\varrho . \frac{\varrho^2 + ab}{(a^2+\varrho^2)^{3/2}\ (b^2+\varrho^2)^{3/2}}.$$

Setzt man $\varrho = a \cdot \tan\alpha$, so folgt $a = \varrho \cdot \operatorname{cotang}\alpha$, $\tan\beta = \frac{\varrho}{b} = \frac{a}{b} \cdot \tan\alpha$,

$\cos^2\beta = \frac{b^2\cos^2\alpha}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$ und $d\varrho = \frac{a\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$ und bei Einsetzung:

$$\Sigma Q = \frac{E_1 \cdot E_2}{2K} \cdot \int_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha}{(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{3/2}} \cdot \sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha.$$

Setzt man ferner $t^2 = a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha$, so wird $\frac{t^2 - b^2}{a^2 - b^2} = \sin^2\alpha$,

$\frac{t^2 - a^2}{a^2 - b^2} = \cos^2\alpha$ und $\frac{t\,dt}{a^2 - b^2} = \sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha$, und das Integral wird:

$$I = \int_{t=\alpha}^{t=b} \frac{t^2 + ab}{t^2 \cdot (a^2 - b^2) \cdot (a+b)} \cdot dt$$

$$= \left| \frac{t}{(a^2 - b^2) \cdot (a+b)} - \frac{ab}{t \cdot (a^2 - b^2) \cdot (a+b)} \right|_a^b = \frac{2}{(a+b)^2}$$

Man erhält also:

$$\Sigma Q = \frac{E_1 \cdot E_2}{K(a+b)^2} = \frac{E_1 \cdot E_2}{K \cdot R^2}.$$

Dies ist aber das Coulomb'sche Gesetz, und es ist interessant, daß jede beliebige Maßfläche zwischen den Punkten P und Q, die zu PQ senkrecht steht, dieselbe Beanspruchung ergibt. Außerhalb, nicht zwischen P und Q durchgehende Maßflächen, sowie die zur Geraden PQ parallelen Maßflächen geben jedoch die Beanspruchung Null, was nicht weiter ausgeführt wird. Dies beweist nach § 10, daß sich auch dieser Raum im mechanischen Gleichgewicht befindet, und es sind in Summa ausschließlich Zug- bez. Druckkräfte vorhanden, die zwischen P und Q verlaufen und auf P und Q endigen. Bei Integration der Beanspruchungen analog § 11, Beweis, wird die Kraftmenge:

$$R \cdot \frac{E_1 \cdot E_2}{K \cdot R^2} = \frac{E_1 \cdot E_2}{K \cdot R}$$

gefunden, was auch für die Richtigkeit der in § 16 ausgesprochenen Sätze Zeugnis ablegt. Das gesamte System PQ befindet sich zunächst nicht im Gleichgewicht, weil die in ihm sich befindende Kraftmenge von Null verschieden ist. Erst durch Anbringung eines mechanischen Stütz- oder Spannstückes beliebiger Form zwischen P und Q wird das Gleichgewicht hergestellt, wenn das Stück imstande ist, die vorhandene Kraftmenge durch eine negative Kraftmenge zu Null zu ergänzen.

§ 19.

Magnetische Felder geradliniger, stromdurchflossener Leiter.

Das magnetische Feld eines sehr langen, geraden, stromdurchflossenen Leiters ist im Abstand a von ihm: $H = \frac{2I}{a}$, wobei I den elektrischen Strom im magnetischen Maß mißt. Nach Maxwell entstehen dabei konzentrische Zuglinien rings um den Leiter und senkrecht zu diesen zwei Scharen zueinander senkrechter Drucklinien, wobei alle drei Scharen die flächenhaft gemessene Dichte: $\frac{\mu \cdot H^2}{8\pi} = \frac{\mu \cdot I^2}{2\pi a^2}$ haben. Daß sich dieser Raum im Gleichgewicht befindet, zeigt sich folgendermaßen. Die ringförmigen Zuglinien beanspruchen zum Gleichgewicht auf dem Zentimeter ihrer Länge nach § 12 $\frac{\mu \cdot I^2}{2\pi a^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot da$ endigende zentrale Drucklinien, wenn man einen hohlen konzentrischen Zylinder von der Wandstärke da, dem Radius a und der Länge 1 cm betrachtet. Die Gesamtzahl der zentralen Drucklinien, welche die Zylinderwandung treffen, ist $2\pi a \cdot \frac{I^2}{2\pi a^2} = \frac{\mu I^2}{a}$. In der Zylinderwandung von der Dicke da endigen also: $\left| \frac{-\mu \cdot I^2 \cdot da}{a^2} \right|$, also auf der Flächeneinheit des Zylindermantels: $\frac{1}{2\pi a} \cdot \left| \frac{-\mu \cdot I^2 \cdot da}{a^2} \right| = \left| \frac{-\mu \cdot I^2 \cdot da}{2\pi a^3} \right|$, d. i. aber wie verlangt.

Nur der Länge des Leiters nach scheint kein Gleichgewicht vorhanden zu sein, da die ihm parallel verlaufenden Drucklinien anscheinend durch keine Zuglinien geschlossen werden. Indes schließt der Leiter selbst diese Drucklinien durch diejenigen Zuglinien, die in ihm selbst entstehen, wenn er seiner Länge nach gespannt wird, und dies geschieht bekanntlich, wenn er von einem Strom durchflossen wird. Zur Ermittelung dieser Leiterspannung braucht man nur eine zum Leiter senkrechte Maßfläche zu legen, deren Beanspruchung man für jedes ihrer Elemente bestimmt, und über sie zu integrieren. Man erhält, wenn der Leiter zylindrisch ist und den Radius r hat:

$$\sum_a D = \int_{a=r}^{a=\infty} 2\pi a \cdot da \cdot \frac{\mu I^2}{2\pi a^2} = \mu I^2 \cdot \int_{a=r}^{a=\infty} \frac{da}{a}.$$

Wendet man hierbei einen anderweitig bekannten Kunstgriff an und setzt $a = \infty = 1$, in Worten gleich der Länge 1 des Leiters, damit

die obere Grenze des Integrals nicht unendlich groß wird, so kommt: $\sum_a D = \mu I^2 . \ln \frac{l}{r}$. Dieser Wert gibt natürlich auch die Leiterspannung.

Das magnetische Feld im Innern des Leiters nimmt nach Maxwell einfach proportional dem Abstand a von der Leiterachse zu. Ist das Außenfeld an der Drahtoberfläche $\frac{\mu . I^2}{2 \pi r^2}$, so ist es im Innern des Leiters $(a < r)$: $\frac{\mu . I^2 . a}{2 \pi r^2 . r}$.

Entsprechend obiger Betrachtung läßt sich hierbei leicht zeigen, daß sich das magnetische Feld im Innern des Leiters nicht im Gleichgewicht befindet, sondern sich zusammenzuziehen sucht. Doch wird ihm durch die Festigkeit des Leiters überall das Gleichgewicht gehalten. Insbesondere käme zu obiger Leiterspannung noch hinzu:

$$\sum_i D = \int_{a=0}^{a=r} 2 \pi a \, da \cdot \frac{\mu I^2 . a}{2 \pi r^3} \quad \frac{\mu . I^2}{3}.$$

Diese Leiterspannung ist also unabhängig vom Radius r. Weiterhin könnte man noch die Spannungen des im Leiter entstehenden elektrischen Feldes berücksichtigen. Da dieselben jedoch nicht im Gleichgewicht sind, ihnen nur durch die Festigkeit des Leiters mechanisch das Gleichgewicht gehalten wird, so kann ihre Berechnung nichts Neues bieten.

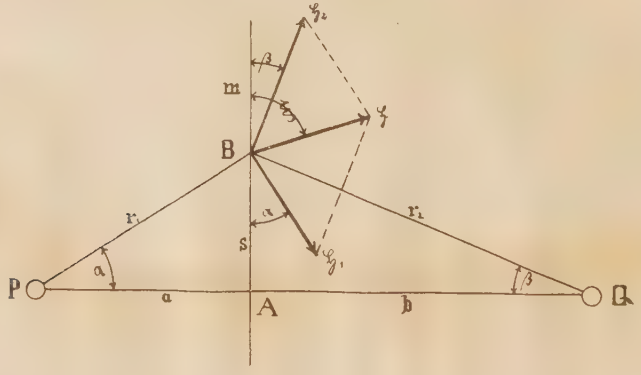

Fig. 16

Nun sei das Feld zweier sehr lang gedachter, paralleler Leiter betrachtet. In Figur 16 möge durch beide Leiter in P und Q ein senkrechter Schnitt gelegt sein und zwischen beiden möge eine ebene

Maßfläche m verlaufen, die sich in Figur 16 in der geraden Linie m projiziert. Man findet dann:

$$Z=\frac{\mu}{8\pi}\cdot\mathfrak{H}^2\cdot\sin^2\xi=\frac{\mu}{8\pi}\cdot(\mathfrak{H}_1\sin\alpha+\mathfrak{H}_2\sin\beta)^2,\quad D=\frac{\mu}{8\pi}\cdot\mathfrak{H}^2\cos^2\xi=\frac{\mu}{8\pi}$$

$$\cdot(\mathfrak{H}_1\cos\alpha-\mathfrak{H}_2\cos\beta)^2,\quad Q=D-Z=\frac{\mu}{2\pi}\left(\frac{I_1^2}{r_1^2}\cos^2\alpha-\frac{I_1^2}{r_1^2}\sin^2\beta+\frac{I_2^2}{r_2^2}\cos^2\beta\right.$$

$$\left.-\frac{I_2^2}{r_2^2}\sin^2\beta-\frac{2\,I_1\cdot I_2}{r_1\cdot r_2}\left[\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\right]\right).$$

Integriert man über Q für einen Streifen von 1 cm Breite der Maßfläche m, so kommt, zunächst mit Bezug auf die beiden ersten Glieder der rechten Seite:

$$\Sigma Q_1=\frac{\mu I^2}{\pi a^2}\cdot\int_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}}\cos^4\alpha\,d\alpha-\frac{\mu I^2}{\pi a^2}\cdot\int_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha\sin^2\alpha\,d\alpha.$$

Integriert man dies, so erhält man eine Anzahl Glieder, die sich teils wegheben, teils bei der Integration Null ergeben und es kommt $\Sigma Q_1=0$. Auch dies Resultat hätte man voraussehen können, da die soeben betrachteten Spannungen von einem Feld herrühren, welches ausschließlich dem Leiter P zugehört. Da dessen Gleichgewichtszustand bereits festgestellt wurde, mußte nach § 10 die Gesamtbeanspruchung der Maßfläche m Null werden. Entsprechend wird $\Sigma Q_2=0$, so daß nur noch das Integral über das Glied $-\frac{\mu I_1\cdot I_2}{\pi r_1\cdot r_2}(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)$ zu berücksichtigen ist, welches sich umwandeln läßt in:

$$-\frac{\mu I_1\cdot I_2}{\pi}\cdot\frac{ab+s^2}{(a^2+s^2)\,(b^2+s^2)},$$

$$\text{Es folgt: }\Sigma Q=\frac{-2\mu I_1\cdot I_2}{\pi}\cdot\int_{s=0}^{s=\infty}\frac{(ab+s^2)\cdot ds}{(a^2+s^2)\,(b^2+s^2)},$$

was man in: $\Sigma Q\quad\frac{-2\mu I_1\cdot I_2}{\pi}\cdot\int_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}}\frac{(b+a\cdot\tan\alpha)\,d\alpha}{b^2+a^2\cdot\tan^2\alpha}$ überführen kann.

Setzt man tang α gleich t, so wird $dt=\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$, $d\alpha=\frac{dt}{1+t^2}$ und:

$$\Sigma Q = \frac{-2\mu \cdot I_1 \cdot I_2}{\pi} \cdot \left(\frac{b}{a\,[a+b]} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt}{[b^2+t^2]} - \frac{1}{[b+a]} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right)$$

$$\frac{-2\mu I_1 \cdot I_2}{\pi} \cdot \left| \frac{1}{a+b} \cdot \operatorname{arctang}\left(t \cdot \frac{a}{b}\right) + \frac{1}{a+b} \cdot \operatorname{arctang} t \right|_0^{\infty}$$

$$= \frac{-2\mu I_1 \cdot I_2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{a+b} = \frac{-2\mu I_1 \cdot I_2}{a+b}.$$

Dieser Wert stimmt wieder mit dem entsprechenden Werte der Elektrizitätstheorie überein.

§ 20.

Dynamisches Gleichgewicht. Allgemeine Gleichgewichtsbedingung abgeschlossener Kraftsysteme, welche kinetische Energie enthalten.

Da später ein Satz abzuleiten ist, der sich auf Geschwindigkeiten bezieht, wollen wir das dynamische Gleichgewichtsgesetz nach unseren Ausdrücken formulieren.

Es ist klar, daß die gefundenen Gesetze nur für ruhende Systeme gelten, deren kinetische Energie also Null ist. Offenbar gibt es aber auch ein Gleichgewicht von Systemen, die kinetische Energie enthalten. Man kann dabei von vornherein erwarten, daß ein ganz einfaches Gleichgewichtsgesetz vorliege, da die Kraftmenge in § 5 und 16 als Kraft mal Länge definiert wurde, also dieselbe Dimension besitzt als die Energie (gleich Kraft mal Weg).

Betrachtet man zwei beliebige, diametral entgegengesetzt liegende Massenpunkte eines rotierenden Systems, die je die Masse m und den Abstand r von der Rotationsachse haben, so beträgt deren kinetische Energie je $\frac{1}{2} m \cdot v^2$, wenn dabei v ihre Tangentialgeschwindigkeit bedeutet, und sie entwickeln nach einem bekannten mechanischen Gesetz Zentrifugalkräfte von der Größe $K = \frac{m \cdot v^2}{r}$. Zwischen beiden Massenpunkten entsteht darum im System, völlig unabhängig von der Form des zwischen ihnen befindlichen Spannstückes nach § 16, eine Zugkraftmenge von der Größe $A = 2r \cdot K = 2r \cdot \frac{mv^2}{r}$ $2mv^2$, d. i. aber das Doppelte ihrer gesamten kinetischen Energie, welche $2 \cdot \frac{1}{2} mv^2 = mv^2$ beträgt. Da sich dieselbe Betrachtung auf jedes Paar korrespondierender Massenpunkte erstrecken läßt, so ist also im Gleichgewichtsfalle der Ueberschuß der Zugkraftmenge

über die Druckkraftmenge eines kinetische Energie enthaltenden Systems gleich dem Doppelten seiner kinetischen Energie.

Dasselbe Gesetz kann man aus der Bewegung zweier umeinander in Kreisbahnen rotierender Himmelskörper ableiten. Besitzen sie die Massen m_1 und m_2, so ist ihre Anziehungskraft nach dem Gravitationsgesetz: $K = \frac{m_1 \cdot m_2}{t \cdot R^2}$. Ist diese im Gleichgewicht mit der Zentrifugalkraft, so ist auch $K = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{r_1} = \frac{m_2 \cdot v_2^2}{r_2}$, wenn v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten der beiden Massen und r_1 und r_2 ihre Abstände von der Rotationsachse sind. Hieraus folgen die kinetischen Energien E_k der beiden Massen: $E_k = \frac{1}{2} K \cdot r_1 = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$, $E_k^1 = \frac{1}{2} K \cdot r_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2$, woraus folgt: $\Sigma E_k = \frac{1}{2} K \cdot (r_1 \cdot r_2) = \frac{K \cdot R}{2}$. Die Summe aller kinetischen Energien ist also gleich der Hälfte der Kraftmenge K.R. Dies Gleichgewicht erscheint übrigens gestört, wenn die beiden Körper nicht in Kreisbahnen laufen, sondern z. B. in Ellipsenbahnen. Sehr rationell kann man sich vorstellen, daß diese Ellipsenbahnen aus Schwingungen entstünden, die über das Gleichgewicht zwischen der halben Zugkraftmenge und der kinetischen Energie hin und her stattfinden.

Da das abgeleitete Gleichgewichtsgesetz allgemein gilt, so ist auch die sogenannte innere oder kinetische Energie eines Gases gleich der Hälfte der Zugkraftmenge, die in der Wandung des das Gas umschließenden Gefäßes verläuft.

Offenbar verhält sich das Gas zunächst ebenso wie ein homogener Druckraum gegenüber der Gefäßwandung, obwohl von einem solchen streng genommen nicht die Rede sein kann, da zwischen den Gasmolekülen gar keine zusammenhängenden Drucklinien zustande kommen. Nach § 7 wird ein homogener Druckraum von drei zueinander senkrechten Scharen von Drucklinien durchzogen gedacht. Die gesamte fingierte Druckkraftmenge ist deshalb $3\,p.v$, wenn p den Druck auf den Quadratzentimeter und v das Volumen des Raumes bedeutet. Nach § 11 bildet sich infolgedessen in der Gefäßwandung eine wahre, nicht fingierte Zugkraftmenge von der absoluten Größe $3\,p.v$ aus. Die kinetische Gastheorie ergibt aber die kinetische Energie eines Gases vom Volumen v und dem Druck p gleich $\frac{3\,p.v}{2}$, also auch hier wird einer kinetischen Energie von einer Zugkraftmenge das Gleichgewicht gehalten, die doppelt so groß ist als sie.

Ein Beispiel für diesen Satz sei kurz ausgeführt. Ein zylindrischer Kessel von 2 m Durchmesser und 5 m Länge werde mit Preßluft oder Wasserdampf von 10 Atm. Ueberdruck gefüllt. Dann beträgt die kinetische Energie dieses Gases nach der kinetischen Gastheorie $\Sigma E_k = \frac{3}{2} . 100000 . v$ Meter-Kilogramm, wobei $v = 5 \pi m^3$, was $\Sigma E_k = 2356200$ Meter-Kilogramm ergibt. Bei der Betrachtung der Beanspruchung der Kesselwand gilt aber folgendes: Die beiden kreisrunden Böden des Kessels werden auf Biegung beansprucht. Die mehr nach dem Innern des Kessels zu gelegenen Schichten ihrer Wandung sind also mit Druckspannungen, die mehr nach außen zu gelegenen mit Zugspannungen belastet. Diese sind aber, analog dem in § 9 gegebenen Beispiel der Balkendurchbiegung, einander entgegengesetzt gleich, ihre Summe gibt also Null. Ferner werden die Böden ihrer Fläche nach gespannt, da der Kesselmantel auf sie aufgenietet ist. Doch sei zur Vereinfachung der Rechnung angenommen, dies sei nicht der Fall. Von vornherein sei der Mantel des Kessels so streng über die Böden genietet, daß bei Füllung des Kessels die Böden gerade von allen Spannungen ihrer Fläche nach entlastet sind. Durch diese Annahme werden nur umständliche Integrationen umgangen, deren Resultat immer dasselbe ist, als das der folgenden Rechnung. So bleibt nur die im Kesselmantel enthaltene Zugkraftmenge zu bestimmen. Der Länge nach wird er durch die Böden gespannt, und zwar mit der Kraft $1^2 . \pi . 100000$ kg, was auf 5 m Länge des Kessels eine Zugkraftmenge von 1570800 mkg ergibt. Peripherisch ist die Kesselwand bekanntlich doppelt so stark beansprucht als der Länge nach. War sie der Länge nach mit $\frac{100000 . \pi}{2 \pi}$ kg pro Meter Zugspannung belastet, so ist sie peripherisch mit 100000 kg Zug pro Meter der Kessellänge beansprucht. Diesen Wert hätte man übrigens auch nach § 12 finden können. Im ganzen Kreisumfang gibt dies $2 \pi . 100000$ mkg Zugkraftmenge pro Meter, also pro 5 m: $\pi . 1000000$ mkg. Die gesamte Zugkraftmenge in der Kesselwand beträgt darum:

$$1570800 + 3141600 = 4712400 \text{ mkg.}$$

Dies ist aber das Doppelte der zuvor angegebenen kinetischen Energie. Bei beliebiger anderer Form des Kessels hätte man dasselbe Resultat gefunden.

§ 21.

Gleichgewichtsbedingung des Massenpunktes eines starren Systems.

In Figur 17 sei ein aus einem beliebigen Kraftsystem herausgeschnittenes, unendlich kleines Parallelepiped mit den Kanten dx, dy

und dz angegeben. Die Seite dx . dz des Parallelepipeds möge die Zuglinie A durchschneiden, und der Winkel zwischen der Normale $\mathfrak{N}$ zur Fläche dx . dz und A möge die Größe α haben. Dann ist nach dem in § 4 Gesagten die Normalkomponente von A gleich $A . \cos^2\alpha$, während die

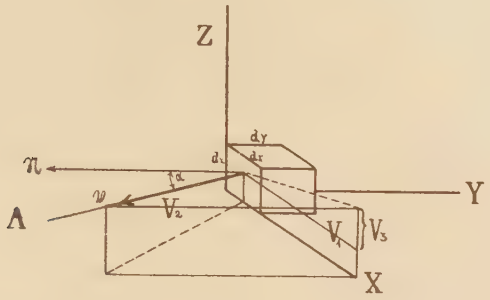

Fig. 17

in dx . dz selbst verlaufende Schubkraft $A . \sin\alpha \cos\alpha$ pro Quadratzentimeter beträgt. Aus diesen Formeln läßt sich nur eine sehr umständliche allgemeine Gleichgewichtsbedingung des Parallelepipeds ableiten. Diese vereinfacht sich jedoch wesentlich, wenn man einen in der Richtung von A verlaufenden Vektor $\mathfrak{V}$ definiert, so daß $\mathfrak{V} . \mathfrak{V} = A$ wird, also der Betrag $|\mathfrak{V}| = \sqrt{A}$. Dabei ist es gleichgültig, ob man dem Vektor $\mathfrak{V}$ die in der Figur gezeichnete Richtung gibt oder die entgegengesetzte.

Die Normalkomponente von A auf dx . dz wird dann gleich $\mathfrak{V}\cos\alpha . \mathfrak{V}\cos\alpha$ und die Schubkraft gleich $\mathfrak{V}\sin\alpha . \mathfrak{V}\cos\alpha$. Dabei ist $\mathfrak{V}\cos\alpha$ gleich der Komponente $j . V_2$ von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}\sin\alpha$ gleich der Vektorsumme $i . V_1 \mathbin{\hat{+}} k . V_3$, wenn man mit i, j und k Einheitsvektoren der Richtungen X, Y und Z definiert. An der Fläche dx . dz greift die Kraft an: $Q_2 = dx . dz . (i . V_1 . V_2 \mathbin{\hat{+}} j . V_2^2 \mathbin{\hat{+}} k . V_2 . V_3)$.

Auf der um dy in der Richtung Y verschobenen Fläche dx . dz greift entsprechend die Kraft an:

$$Q_2' = dx . dz . \Big(i . [V_1 + \frac{\delta V_1}{\delta y} . dy] [V_2 + \frac{\delta V_2}{\delta y} . dy] \mathbin{\hat{+}} j . [V_2 + \frac{\delta V_2}{\delta y} . dy]^2 \mathbin{\hat{+}} k . [V_2 + \frac{\delta V_2}{\delta y} . dy] [V_3 + \frac{\delta V_3}{\delta y} . dy] \Big).$$

Die auf das Parallelepiped wirksame Kraft wird dann $Q_2' - Q_2$, wofür man nach Weglassung der unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung erhält

$$q_2 = Q'_2 - Q_2 = dx \cdot dy \cdot dz \cdot \left(i \cdot \left[V_1 \cdot \frac{\delta V_2}{\delta y} + V_2 \cdot \frac{\delta V_1}{\delta y} \right] \hat{+} 2j \cdot V_2 \cdot \frac{\delta V_2}{\delta y} \right.$$
$$\left. \hat{+} k \cdot \left[V_2 \cdot \frac{\delta V_2}{\delta y} + V_3 \cdot \frac{\delta V_2}{\delta y} \right] \right).$$

Entsprechend kann man die Kräfte q_3 und q_1 finden, und man erhält in Summa, wenn man noch für $dx \,.\, dy \,.\, dz$ das Volumen dv setzt:

$$q = q_1 \hat{+} q_2 \hat{+} q_3 \quad dv \cdot \left(i \left[V_1 \cdot \frac{\delta V_2}{\delta y} + V_2 \cdot \frac{\delta V_1}{\delta y} + 2 V_1 \cdot \frac{\delta V_1}{\delta x} + V_3 \cdot \frac{\delta V_1}{\delta z} \right.\right.$$
$$\left.\left. + V_1 \cdot \frac{\delta V_3}{\delta z} \right] \hat{+} j \cdot [\,.\,.\,.\,.\,.\,] \hat{+} k \cdot [\,.\,.\,.\,.\,.\,] \right).$$

Man kann dies noch anders ordnen:

$$q = dv \,.\, \left(i \cdot \left[V_1 \cdot \left(\frac{\delta V_1}{\delta x} + \frac{\delta V_2}{\delta y} + \frac{\delta V_3}{\delta z} \right) + V_1 \frac{\delta V_1}{\delta x} + V_2 \frac{\delta V_1}{\delta y} + V_3 \frac{\delta V_1}{\delta z} \right] \right.$$
$$\left. \hat{+} j [\,.\,.\,.\,.\,] \hat{+} k [\,.\,.\,.\,.\,] \right).$$

Wenn man die im genannten Werke von Föppl angewendete Schreibweise (Seite 42 und 49) einführt, geht obiger Wert über in:

$$q = dv \,.\, (i\, V_1 \,.\, \mathrm{div}\, \mathfrak{V} \hat{+} i (\mathfrak{V} \nabla) V_1 \hat{+} j\, V_2 \,.\, \mathrm{div}\, \mathfrak{V} \hat{+} j (\mathfrak{V} \nabla) V_2 \hat{+} k\, V_3$$
$$\,.\, \mathrm{div}\, \mathfrak{V} \hat{+} (\mathfrak{V} \nabla) V_3).$$

Wenn man bedenkt, daß die Vektorsumme $i\, V_1 \hat{+} j\, V_2 \hat{+} k\, V_3 = \mathfrak{V}$ ist, so geht dies über in:

$$q = dv \,.\, (\mathfrak{V} \,.\, \mathrm{div}\, \mathfrak{V} \hat{+} (\mathfrak{V} \nabla) \mathfrak{V}). \qquad (1)$$

Im Gleichgewichtsfalle soll nun $q = 0$ sein. Also lautet die allgemeine Gleichgewichtsbedingung:

$$\mathfrak{V} \,.\, \mathrm{div}\, \mathfrak{V} + (\mathfrak{V} \nabla) \mathfrak{V} = 0 \qquad (2)$$

bei Anwesenheit einer einzigen Schar Kraftlinien im Raume. Die Bedeutung dieser Gleichung findet man sofort, wenn man das Koordinatensystem XYZ z. B. so legt, daß $\mathfrak{V}$ in die Richtung der X-Achse fällt. Dann wird die X-Komponente von q:

$$q_1 = dv \,.\, i \left(V_1 \,.\, \mathrm{div}\, \mathfrak{V} + V_1 \cdot \frac{\delta V_1}{\delta x} \right),$$

da ja unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{V}$ in der X-Achse verlaufe, die Komponenten V_2 und $V_3 = 0$ sind. Nach der Identitätsgleichung $A \,.\, \mathrm{div}\, \mathfrak{B} + (\mathfrak{B} \nabla) \,.\, A = \mathrm{div}\, A \,.\, \mathfrak{B}$ (Föppl, Seite 61) geht dies weiter über in $q_1 = \mathrm{div}\, V_1 \,.\, V_1 \,.\, i = \mathrm{div}\, A \,.\, i$, d. h. also, im Falle, daß q_1 gleich Null werden soll, muß die als Vektor $A \,.\, i$ gedachte Spannung A divergenzfrei verteilt sein, die Kraftlinien A müssen in unveränderter Gesamtzahl durch den Raum laufen. Man findet so die in § 14 ausgesprochene Bedingung wieder, mit Berücksichtigung der Voraussetzung, daß nur eine einzige Schar Kraftlinien A vorhanden sei.

Hiermit ist die Bedeutung der Gleichungen jedoch nur unvollständig ausgesprochen. Man erhält vollständig, wenn $\mathfrak{V}$ in der X-Achse verläuft:

$$q = dv \cdot \left(i \cdot V_1 \cdot \operatorname{div} \mathfrak{V} + i \cdot V_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial x} + j \cdot V_1 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial x} + k \cdot V_1 \cdot \frac{\partial V_3}{\partial x} \right). \quad (2a)$$

Es treten also auch noch Kräfte senkrecht zu $\mathfrak{V}$ auf, wie die beiden letzten Glieder der rechten Seite besagen. Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Glieder nur dann Null werden, wenn die A geradlinig durch den Raum laufen, und daß sie an und für sich ein Maß für die Krümmung der A abgeben. Legt man nämlich das Koordinatensystem auch noch so, daß die Y-Achse durch den Krümmungsmittelpunkt M der A hindurchgeht, so kommt: $\partial x = r \cdot \partial \alpha$ und $\partial V_2 = V_1 \cdot \partial \alpha$ (Fig. 17),

$$\text{also } \frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{V_1}{r} \text{ und } V_1 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{V_1^2}{r} = \frac{A}{r}.$$

Wir finden so den allgemeinen Beweis für die bereits in § 12 und 13 ausgesprochene Bedingung. Man kann übrigens auch analytisch beweisen, daß der Wert der Gleichung 1 bei beliebiger Lage des Koordinatensystems nicht anders ausfällt als bei der in 2a gewählten speziellen Lage.

Es ist nur noch zu bemerken, daß die Kraftlinienschar A in keiner Weise für sich allein das Gleichgewicht an den Krümmungsstellen finden könnte. Denn die durch die div der $\mathfrak{V}$ hervorgerufene Kraft fällt immer in die Richtung der $\mathfrak{V}$ selbst, kann also den zu $\mathfrak{V}$ senkrecht stehenden Komponenten von q nicht entgegenwirken. Es ist also mindestens eine zweite Kraftlinienschar notwendig, die das Gleichgewicht an diesen Krümmungsstellen herstellt. Auf diese, wie auf eine dritte, vierte usw. Kraftlinienschar ist dieselbe Betrachtungsart anzuwenden. Für Drucklinien gilt jedoch immer:

$$q = -dv \cdot (\mathfrak{V} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{V} + (\mathfrak{V} \nabla) \mathfrak{V}), \quad (3)$$

wobei q wieder die am Volumenelement angreifende Kraft bezeichnet. Ueber sämtliche Kraftlinienscharen ist dann zu summieren und man erhält als Gleichgewichtsbedingung, daß die Vektorsumme Σq gleich Null an allen Stellen des Raumes sein muß.

§ 22.

Geometrischer Charakter der mechanischen Kraftlinien und des Vektors $\mathfrak{V}$.

Ein bewegter Körper von der Masse m möge unter Einfluß irgendwelcher Kräfte eine Bahn mit der Geschwindigkeit v durchlaufen. Wir denken ihn uns in jedem Zeitteilchen dt einmal angehalten und einmal wieder in die Geschwindigkeit v versetzt. Diese unsere Vorstellung

ändert nichts am Verlauf der Erscheinung und ist deshalb erlaubt. Da aber zum Anhalten und zum Wiederinbewegungsetzen des Körpers einmal der Impuls $J = -m.v$ und dann wieder der Impuls $J = +m.v$ aufgewendet werden muß, und beide immer abwechselnd in unendlich kleinen Abständen voneinander auf der Bahn anzuordnen sind, so werden wir offenbar an die in § 2 über Kraftlinien angestellten Betrachtungen erinnert und dürfen annehmen, daß sich mit Hilfe dieser Vorstellung das dynamische Gleichgewichtsgesetz sofort ableiten läßt. Wir können uns nämlich sofort denken, daß ein bewegter Körper eine Drucklinie von der Stärke $m.v$ durch den Raum beschreibt. Umgekehrt ausgedrückt würde dieser Satz lauten: „Mechanische Kraftlinien beschreiben geometrisch dieselben Bahnen wie bewegte Körper."

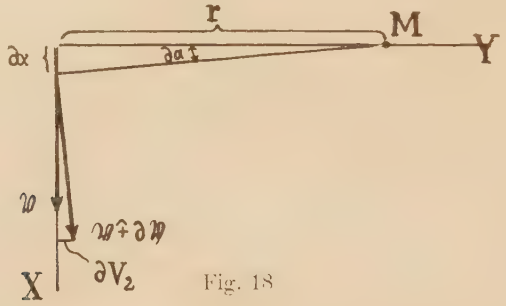

Fig. 18

An Stelle einer Kraftlinienschar können wir nun zunächst versuchsweise eine strömende Flüssigkeit setzen. Nennen wir jetzt die Dichte einer strömenden Flüssigkeit ϱ, ihre Geschwindigkeit v, so wird hier der auf die Einheit des Strömungsquerschnittes kommende Impuls gleich ϱv^2, also gleich der doppelten kinetischen Energie (§ 20), weil die Einheit des Querschnittes in der Sekunde von der Masse $\varrho.v$ mit der Geschwindigkeit v durchflossen wird.

Wir wollen die Flüssigkeit als kompressibel annehmen, aus diesem Grunde ϱ variabel setzen und einen neuen Vektor $\sqrt{\varrho}.v$ definieren, der z. B. bei der Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit von Gasen vorkommt.

Zur Untersuchung von $\mathfrak{V}$ setzen wir nun dafür in Formel (3) $\sqrt{\varrho}.v$ ein. Wir erhalten für die i-Komponente der vom Volumenelement ausgeübten Kraft:

$$\sqrt{\varrho}\,v_1\left(\frac{\partial\sqrt{\varrho}\,v_1}{\partial x}+\frac{\partial\sqrt{\varrho}\,v_2}{\partial y}+\frac{\partial\sqrt{\varrho}\,v_3}{\partial z}\right)+\sqrt{\varrho}\,v_1\frac{\partial\sqrt{\varrho}\,v_1}{\partial x}+\sqrt{\varrho}\,v_2\frac{\partial\sqrt{\varrho}\,v_1}{\partial y}$$
$$+\sqrt{\varrho}\,v_3\frac{\partial\sqrt{\varrho}\,v_1}{\partial z}=q_1 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\varrho v_1^2}{\partial x}+\frac{\partial\varrho v_1 v_2}{\partial y}+\frac{\partial\varrho v_1 v_3}{\partial z}=q_1, \qquad (4)$$

wobei wir jetzt q auf die Volumeneinheit selbst bezogen und infolgedessen links den Faktor dv, der früher das Volumenelement maß, fortgelassen haben.

Eine derartige Formel kann man nun aber auch aus den Eulerschen Grundgleichungen der Hydrodynamik ableiten.

Zu diesem Zwecke haben wir zu bedenken, daß wir für jede beliebige, kompressible oder inkompressible, stationärfließende Flüssigkeit ein Gesetz aufstellen können, welches besagt, daß aus jedem Volumenelement ebensoviel Masse austreten soll, wie darin eintritt. Diese in einer Sekunde am Ort ein- und austretende Masse wird nun durch das schon genannte Produkt $\varrho . v$ bezeichnet. Fügen wir außerdem die für eine stationäre Strömung geltende Bedingung hinzu, daß auch v am Orte konstante Richtung haben soll, so folgt einfach $\frac{\partial \varrho . v}{\partial t} = 0$ oder $v \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \frac{\partial v}{\partial t} = 0$, welche Gleichung für die i-Komponente $v_1 \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0$ ergibt.

Nach den Eulerschen Grundgleichungen der Hydrodynamik läßt sich dies umwandeln in:

$$v_1 \left(\frac{\partial \varrho v_1}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v_2}{\partial y} + \frac{\partial \varrho v_3}{\partial z} \right) + \varrho \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) = \varrho \frac{d v_1}{dt}$$

$$\text{oder} \quad \frac{\partial \varrho v_1^2}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v_1 v_2}{\partial y} + \frac{\partial \varrho v_1 v_3}{\partial z} = \frac{\varrho d v_1}{dt}. \qquad (4a)$$

Wir erkennen hierin unsere frühere Gleichung wieder, wenn wir $\varrho \frac{d v_1}{dt} = q_1$ setzen. Auch können wir dieselbe Rechnung für die beiden anderen Komponenten durchführen.

Somit ist b e w i e s e n, daß unsere Fiktion geometrisch durchführbar ist. Daß man sich an Stelle von Zuglinien bewegte Flüssigkeiten mit imaginärer Trägheit vorstellen muß, ändert nichts. Wir dürfen den Satz aufstellen: „Unser Vektor V hat, geometrisch genommen, denselben Charakter mit einer Geschwindigkeit einer Flüssigkeit, und unsere mechanischen Kraftlinien haben, geometrisch genommen, denselben Charakter mit dem Doppelten der kinetischen Energie dieser Flüssigkeit."

§ 23.

Die solenoidale und wirbelfreie Vektorverteilung als mechanische Gleichgewichtsbedingung im Aether.

Es sei der Maxwell'sche Fall der Kraftlinienstreuung betrachtet, bei dem an jeder Stelle des Raumes drei zueinander senkrechte und

untereinander gleich dichte Scharen Kraftlinien vorhanden sind, von welchen zwei Scharen Drucklinien und eine Schar Zuglinien sind.

Was zunächst deren Wirkung auf eine schrägliegende Fläche F (siehe Figur 19) betrifft, deren Normale $\mathfrak{N}$ mit der Schar Zuglinien A

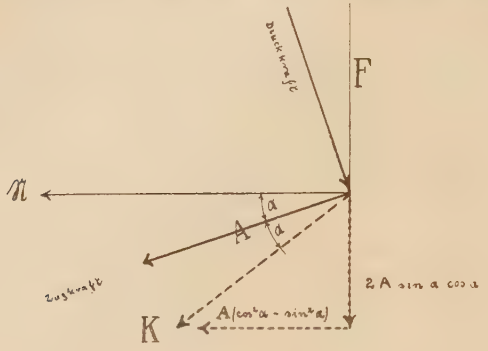

Fig. 19

den Winkel α bildet, so ist die Normale der Zuglinien $A \cdot \cos^2\alpha$, dagegen die in der Fläche F ausgeübte Schubkraft $A \cdot \sin\alpha \cos\alpha$ auf dem Quadratzentimeter. Was die Wirkung der noch hinzu kommenden beiden Scharen Drucklinien betrifft, so bilden diese zusammen homogene Druckflächen, in denen nach § 6 die Richtung beliebig ist, in der die beiden Scharen verlaufend gedacht werden. Man kann sie sich darum stets so verlaufend denken, daß die eine Schar der Fläche F parallel verläuft, während die andere in der durch die Normale $\mathfrak{N}$ und die Richtung der A bestimmten Ebene verläuft, d. h. also in der Ebene des Winkels α. Die Normalwirkung der ersteren Schar Drucklinien auf F wird dann zu Null $(-A \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\pi = 0)$ und ebenso deren Schubwirkung $(-A \cdot \sin \frac{1}{2}\pi \cdot \cos \frac{1}{2}\pi = 0)$. Dagegen die Normalwirkung der zweiten Schar wird $-A \cdot \cos^2(\alpha - \frac{1}{2}\pi) = -A \cdot \sin^2\alpha$ und ihre Schubwirkung $-A \cdot \sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi) \cdot \cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi) = A \cdot \sin\alpha \cos\alpha$. Die gesamte Normalwirkung der drei Scharen auf F ist also $A \cdot (-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = A \cdot \cos 2\alpha$, und die gesamte Schubwirkung $2A \sin\alpha \cos\alpha = A \sin 2\alpha$. Wenn man diese Wirkungen nach dem pythagoräischen Satze zusammensetzt, erhält man:

$$\sqrt{A^2 \cos 2\alpha + A^2 \cdot \sin 2\alpha} = A.$$

Die auf die Fläche F wirksame resultierende Kraft K auf dem Quadratzentimeter ist also gleich der Dichte A. Doch darf dabei nicht über-

sehen werden, daß die Kraft K unter dem Winkel 2α zur Normale statt α auf die Fläche F wirkt, wie die geometrische Zusammensetzung der beiden Kräfte zeigt. Zur weiteren Veranschaulichung dieser Sätze ist in Figur 20 ein von der Kugel P ausgehendes elektrisches Feld gezeichnet worden, und es wurde einmal aus diesem Feld der Raum einer Kugel M herausgeschnitten und die Richtung der Kraft K für jede Stelle der Kugeloberfläche gezeichnet, während zweitens für den durch die Ebene E vom Feld abgeschnittenen Raum N die entsprechenden Angaben gemacht wurden. In den Gebieten ab und cd wirken die K als Zugkräfte auf die Räume M und N, in den Gebieten bc bez. ad als Druckkräfte.

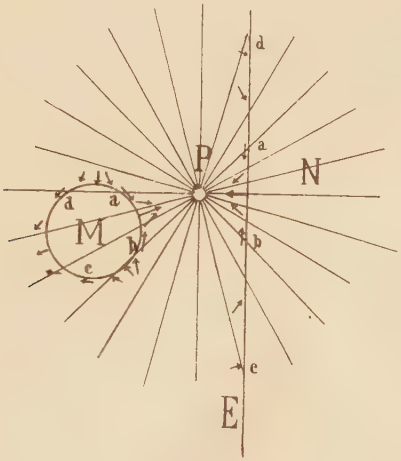

Fig. 20

Nach diesen Vorbemerkungen leitet sich die Gleichgewichtsbedingung für ein unendlich kleines Parallelepiped mit den Kanten dx, dy und dz im Fall der Maxwell'schen Kraftlinienstreuung folgendermaßen ab.

Aehnlich wie in § 21, ist jetzt die Normalwirkung auf die Fläche $dx \,.\, dz$: $dx\, dz\, A.(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$ und die Schubwirkung $dx \,.\, dz \,.\, 2A \sin\alpha \cos\alpha$. Diese Werte kann man umformen, wenn man einen Vektor $\mathfrak{V}$ so definiert, daß $\mathfrak{V}.\mathfrak{V} = A$ wird, also $|\mathfrak{V}| = \sqrt{A}$, wobei es wieder gleichgültig ist, ob $\mathfrak{V}$ die in Figur 21 gezeichnete Richtung erhält oder die umgekehrte. Für $\mathfrak{V}\cos\alpha$ läßt sich wieder schreiben $\mathfrak{j}\, V_2$ und für $\mathfrak{V}\sin\alpha$ die Vektorsumme $\mathfrak{i}\,.\,V_1 \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{k} V_3$ und man erhält:

$$Q_2 \quad dx \,.\, dz\, [\mathfrak{j}\,.\,(V_2^2 \cdot (\mathfrak{i}\,.\,V_1 \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{k}\,.\,V_3)^2) \mathbin{\hat{+}} 2\,\mathfrak{i}\,.\,V_1\,.\,V_2 \mathbin{\hat{+}} 2\,\mathfrak{k}\,.\,V_2\,.\,V_3].$$

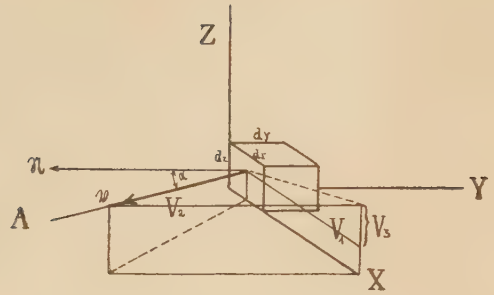

Fig. 21

Das Quadrat $(i.V_1 \hat{+} k.V_3)^2$ ist nun gleich $V_1^2 + V_3^2$, so daß kommt:

$$Q_2 = dx.dz.[i.2V_1.V_2 \hat{+} j.(V_2^2 \quad V_1^2 \quad V_3^2) \hat{+} 2.k V_2.V_3].$$

Für die gegenüberliegende Seite dx.dz des Parallelepipeds gilt:

$$Q_2' = dx.dz.\Big[i.2(V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y}.dy)(V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial y}.dy) \hat{+} j.\Big((V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial y}.dy)^2 \quad (V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y}.dy)^2 \quad (V_3 + \frac{\partial V_3}{\partial y}.dy)^2\Big) \hat{+} k.2(V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial y}.dy)(V_3 + \frac{\partial V_3}{\partial y}.dy)\Big]$$

und man erhält bei Weglassung der unendlich kleinen Glieder zweiter Ordnung:

$$q_2 = Q_2' \quad Q_2 - dv\Big[i.2\Big(V_1\frac{\partial V_2}{\partial y} + V_2\frac{\partial V_1}{\partial y}\Big) \hat{+} j.2\Big(V_2\frac{\partial V_2}{\partial y} - V_1\frac{\partial V_1}{\partial y} - V_3\frac{\partial V_3}{\partial y}\Big) \hat{+} k.2\Big(V_2\frac{\partial V_3}{\partial y} + V_3\frac{\partial V_2}{\partial y}\Big)\Big].$$

Entsprechend werden die Kräfte q_1 und q_3 ermittelt und in Summa kommt:

$$q - q_1 \hat{+} q_2 \hat{+} q_3 = dv.2.\Big[i\Big(V_1\frac{\partial V_2}{\partial y} + V_2\frac{\partial V_1}{\partial y} + V_1\frac{\partial V_1}{\partial x} - V_3\frac{\partial V_3}{\partial x} \quad V_2\frac{\partial V_2}{\partial x} + V_3\frac{\partial V_1}{\partial z} + V_1\frac{\partial V_3}{\partial z}\Big) \hat{+} j(\ldots) \hat{+} k(\ldots)\Big].$$

Wenn man dies anders ordnet, erhält man:

$$q \quad 2dv.\Big[(iV_1 \hat{+} jV_2 \hat{+} kV_3)\Big(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\Big) \hat{+} i\Big(V_3\Big(\frac{\partial V_1}{\partial z} \quad \frac{\partial V_3}{\partial x}\Big) + V_2\Big(\frac{\partial V_1}{\partial y} \quad \frac{\partial V_2}{\partial x}\Big)\Big) \hat{+} j\Big(V_1\Big(\frac{\partial V_2}{\partial x} \quad \frac{\partial V_1}{\partial y}\Big) + V_3\Big(\frac{\partial V_2}{\partial z} \quad \frac{\partial V_3}{\partial y}\Big)\Big) \hat{+} k\Big(V_2\Big(\frac{\partial V_3}{\partial y} \quad \frac{\partial V_2}{\partial z}\Big) + V_1\Big(\frac{\partial V_3}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial z}\Big)\Big)\Big].$$

Nach den in Föppl auf Seite 18 und 44 angegebenen Rechenregeln geht dies über in:

$$q = 2\,dv\,(\mathfrak{V}\,.\,\mathrm{div}\,\mathfrak{V} + \mathfrak{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{V}\,.\,\mathfrak{V}). \qquad (5)$$

Wenn man bedenkt, daß das Glied $2\,dv\,.\,\mathfrak{V}\,.\,\mathrm{div}\,\mathfrak{V}$ stets eine in die Richtung $\mathfrak{V}$, dagegen das Glied $2\,dv\,\mathfrak{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{V}\,.\,\mathfrak{V}$ stets eine senkrecht zu $\mathfrak{V}$ verlaufende Kraft bedeutet, so findet man, daß zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung $q = 0$ sowohl $\mathrm{div}\,\mathfrak{V} = 0$ als auch $\mathrm{curl}\,\mathfrak{V} = 0$ sein muß.

Bei der Maxwell'schen Kraftlinienstreuung ist also der Vektor $\mathfrak{V}$ vom Betrag $|\mathfrak{V}| = \sqrt{A}$ im mechanischen Gleichgewichtsfalle solenoidal und wirbelfrei verteilt.

§ 24.

Elektrostatisches und magnetostatisches Anziehungsgesetz.

Es möge ein von einer mit der Elektrizitätsmenge E_1 geladenen Kugel ausgehendes wirbelfreies Feld $\mathfrak{E}$ vorhanden sein. Im Abstand r von der Kugel ist nach § 17 $A = \frac{E_1^2}{8\pi K r^4}$, woraus man $\mathfrak{V} = \frac{E_1}{\sqrt{8\pi K}\,r^2}$ definieren kann. Da nun das Feld $\mathfrak{E}$ nach der Maxwell'schen Einheitswahl $\mathfrak{E} = \frac{E_1}{K\,.\,r}$ ist, so kommt $\mathfrak{V} = \mathfrak{E}\,.\,\sqrt{\frac{K}{8\pi}}$, also $\mathrm{div}\,\mathfrak{V} = \sqrt{\frac{K}{8\pi}}\,.\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}$.

Setzt man nun die Elektrizitätsmenge $E = \frac{K}{4\pi}\,.\int dv\,.\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}$ wie Maxwell, so folgt: $E = \sqrt{\frac{K}{2\pi}}\,.\int dv\,.\,\mathrm{div}\,\mathfrak{V}$, und $\sqrt{\frac{2\pi}{K}}\,.\,E = \int dv\,.\,\mathrm{div}\,\mathfrak{V}$. Auf eine zweite, mit der Elektrizitätsmenge E_2 geladene Kugel wirkt also im Abstand r von E_1 die Kraft in Richtung von der Größe (Gleichung 5):

$$\Sigma q = 2\,.\int dv\,.\,\mathfrak{V}\,.\,\mathrm{div}\,\mathfrak{V} = 2\,.\,\frac{E_1}{r^2\sqrt{8\pi K}}\,.\,E_2\,.\sqrt{\frac{2\pi}{K}} = \frac{E_1\,.\,E_2}{K\,.\,r^2}.$$

Dies ist wieder das Coulomb'sche Gesetz und es zeigt sich gegenüber der in § 18 ausgeführten Rechnung, welch bedeutende Vereinfachung durch die Einführung des Vektors $\mathfrak{V}$ erzielt wird.

Entsprechende Ableitungen kann man für die magnetostatischen Anziehungskräfte führen.

§ 25.

Gesetz der elektromagnetischen Kräfte.

Entsprechend § 24 läßt sich nach Gleichung 5 die Kraft bestimmen, die auf einen stromdurchflossenen Leiter einwirkt, der sich in einem magnetischen Feld $\mathfrak{H}$ befindet. Setzt man hier:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{H}\sqrt{\frac{\mu}{8\pi}}$$

so kommt nach Gleichung 5, da das Feld solenoidal ist:

$$\Sigma q = 2 . \int dv . \nabla \operatorname{curl} \mathfrak{V} . \mathfrak{V} = \frac{\mu}{4\pi} . \int dv . \nabla \operatorname{curl} \mathfrak{H} . \mathfrak{H}.$$

Setzt man $\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{i}$ (Föppl, Seite 151), wobei $\mathfrak{i}$ die elektrische Stromdichte im Leiter mißt, so geht dies über in:

$$\Sigma q \quad \mu . \int dv . \nabla \mathfrak{i} . \mathfrak{H}.$$

Dies ist aber das bekannte elektromagnetische Gesetz (Föppl, Seite 179), mit Hilfe des Vektors $\mathfrak{V}$ einfacher als in § 19 abgeleitet.

§ 26.

Gravitationsgesetz.

Für den Fall, daß die in § 23 eingeführte Größe A Drucklinien bedeutet, zu denen zwei Scharen ebenso dichter und untereinander senkrechter Scharen Zuglinien senkrecht stehen, erhält man als Normalbeanspruchung einer Fläche F: $-A(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$ auf dem Quadratzentimeter, und als Schubbeanspruchung: $-2A \sin\alpha \cos\alpha$ auf dem Quadratzentimeter. Definiert man dann wieder einen Vektor $\mathfrak{V}$ vom Betrag $|\mathfrak{V}| = \sqrt{A}$, so erhält man nach Durchführung einer Rechnung analog der in § 23 gegebenen:

$$q = -2 dv . (\mathfrak{V} . \operatorname{div} \mathfrak{V} \mp \nabla \operatorname{curl} \mathfrak{V} . \mathfrak{V}). \qquad (5a)$$

Setzt man $\mathfrak{V} = \mathfrak{G} . \sqrt{\frac{t}{8\pi}}$, $\operatorname{div} \mathfrak{V} \quad \sqrt{\frac{t}{8\pi}} . \operatorname{div} \mathfrak{G}$ und legt man jeder Masse m eine bestimmte $\operatorname{div} \mathfrak{G}$ bei, so daß $m = \frac{t}{4\pi} . \int dv \operatorname{div} \mathfrak{G}$ wird, so folgt $m = \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \int dv \operatorname{div} \mathfrak{V}$ und nach Gleichung 5a:

$$\Sigma q = -2 \int dv . \mathfrak{V} . \operatorname{div} \mathfrak{V} = -2 \frac{m_1}{r^2 \sqrt{8\pi t}} m_2 \sqrt{\frac{2\pi}{t}} = -\frac{m_1 m_2}{t . r^2} .$$

Setzt man für t den Erfahrungswert $1{,}498 . 10^7$ ein, so findet man, daß aus jedem Gramm Masse $\sqrt{\frac{2\pi}{t}} = 6{,}476 . 10^{-4}$ Gravitationslinien $\mathfrak{V}$ herausquellen; im Abstand 1 cm von einem Gramm Masse beträgt die Dichte des Feldes $\mathfrak{V}_1 = \sqrt{\frac{1}{8\pi t}} = 5{,}154 . 10^{-5}$, also ist die Anziehungskraft auf ein Gramm Masse dort nach obiger Formel:

$$\frac{1}{t} = 2 . 5{,}154 . 6{,}476 . 10^{-9} = 6{,}675 . 10^{-8} \text{ Dyn.}$$

Damit das Gravitationsfeld der Erde 981 Dyn auf ein Gramm Masse ausübt, müßte es die Dichte $\mathfrak{V}_g \quad \mathfrak{V}_1 . t . 981 \quad \sqrt{\frac{t}{8\pi}} . 981 \quad 757\,400$

haben. Die vertikalen Druckspannungen und die horizontalen Zugspannungen betragen demnach:

$$A_g \quad \mathcal{V}_g^2 - \frac{t}{8\pi} . 981^2 = 5{,}736 . 10^{11} \text{ Dyn qcm}$$

$$\text{oder } A_g' = \quad = \frac{t}{8\pi} . 981 = 584{,}8 . 10^6 \text{ g/qcm},$$

was von der Leistung des Aethers eine Vorstellung gibt.

Da die zwei Scharen horizontaler Zuglinien die Krümmung des Erdradius ($R = 6{,}367 . 10^8$ cm) besitzen, so bedürfen sie zum Gleichgewicht vertikaler endigender Drucklinien von der Zahl $\frac{2 A'_g}{R} = 1{,}84$ g/ccm. Von den 584 800 kg vertikaler Drucklinien endigen also 1,84 g in jedem Kubikzentimeter.

Die Gesamtzahl der aus der Erde herausquellenden $\mathcal{V}$ beträgt $4 R^2 \pi . \mathcal{V}_g = \sqrt{2 \pi t} . 981 . R^2 = 3{,}858 . 10^{24}$ und hieraus folgt bei Division durch $\sqrt{\frac{2\pi}{t}}$ die Masse der Erde als $t . 981 . R^2 = 5{,}96 . 10^{27}$ g.

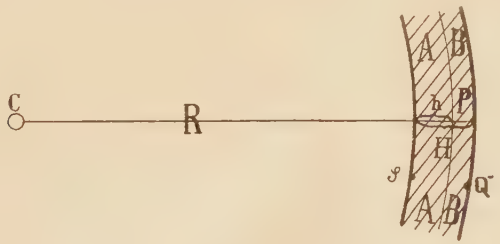

Fig. 22

Denkt man sich diese Masse auf eine starre, aber massenlose Kugel vom Erdradius in der in Figur 22 angedeuteten Schicht gleichförmig aufgetragen, so lagern über jedem Quadratzentimeter der Kugeloberfläche:

$$\frac{t . 981}{4\pi} = 1169, \; 6 . 10^6 \text{ g}.$$

Nach der Potentialtheorie „wiegt" nun ein zu unterst (z. B. bei S) liegendes Gramm Masse Null; ein in der Höhe h (z. B. bei P) liegendes Gramm Masse $\frac{h}{H}$ g, wenn H die Gesamthöhe der Schicht ist, da nämlich hierbei nur die in Figur 22 mit A bezeichnete Schicht eine Anziehungskraft ausübt, B aber auszuschalten ist; und ein zu oberst (z. B. bei Q) liegendes Gramm Masse $\frac{H}{H} = 1$ g. Hieraus ergibt sich nach bekannten Integrationsregeln $\frac{1}{2} \cdot \frac{t . 981}{4\pi} = 584{,}8 . 10^6$ g als

Größe des von der Gesamtschicht auf die gedachte massenlose Kugel ausgeübten Druckes.

Da dieser Wert aber dem zuvor für A_g' gefundenen gleich ist, dürfen wir schließlich (gleichfalls im Einklang mit der Potentialtheorie) den Satz aufstellen, daß der Aetherdruck auf der Erdoberfläche ebenso groß ist, als der Druck betragen würde, den die Masse der Erde infolge gegenseitiger Anziehung auf eine der Erde gleich große, starre, aber massenlose Kugel ausüben würde, falls sie gleichmäßig auf deren Oberfläche aufgetragen ist.

II. ABSCHNITT.

Relative Wege.

§ 27.

Dehnungslinie und Tensor.

So, wie im ersten Abschnitt die zwischen räumlich einander unmittelbar benachbarten Punkten wirksamen relativen Kräfte untersucht wurden, lassen sich auch die entsprechenden relativen Wege erforschen. Man findet dabei bald, daß sich diese letzteren geometrischen Gebilde von den ersteren nur in wenigen Punkten unterscheiden.

Die Betrachtung des § 2 läßt sich z. B. ohne Aenderung auch auf relative Wege anwenden. Wir nehmen an, die Punkte N O P Q R seien aus ihrer ursprünglichen räumlichen Lage auseinandergerückt. Es gilt dann gleich einem Axiom, daß z. B. O von N um dieselbe Strecke h nach rechts abgerückt ist, wie N, von O ausgesehen, von O um die Strecke g nach links abgerückt ist, so daß also $g + h = 0$ herauskommt. Diese Erscheinung, die sich auf zwei unendlich nahe benachbarte Punkte N und O bezieht, wollen wir „Dehnung“ nennen. Es ist selbstverständlich, daß dann der relative Weg der Punkte N und O unendlich klein zweiter Ordnung wird.

Ist die Dehnung durch die Punktreihe hindurch eine gleichmäßige, so ist wieder:

. . . g = l = n . . . und . . . h = k = m . . .,

und wir gelangen somit sofort auf den Begriff der „Dehnungslinien“. Bei einer Zusammenrückung der räumlich benachbarten Punkte wollen wir von „negativer Dehnung“ und von „negativen Dehnungslinien“ sprechen.

Es sei vorausgeschickt, daß es für uns jetzt gleichgültig ist, ob sekundliche Dehnungen (= relative Geschwindigkeiten) oder vollendete Dehnungen (= relative Wege) vorliegen. Beide unterscheiden

sich nur um den Faktor $\frac{1}{dt}$. Da dieser aber entweder in allen unsern Summanden oder in keinem auftritt, so beeinflußt er unsere Rechnungen nicht.

Wie im ersten Abschnitt durch die Kraftlinien, so können wir jetzt nun auch durch die Dehnungslinien „Maßlinien“ oder „Maßflächen“ legen und „homogene Dehnungsflächen“ bez. „Dehnungsräume“ definieren, denn es treten aus analogen Gründen wie dort die Faktoren $\cos^2\alpha$ für die Normalkomponenten der Dehnung und $\sin\alpha\cos\alpha$ für die Schubkomponenten der Dehnung auf. Wir können ferner die „Dehnungsmenge“ als die Summe der Produkte der Dehnungslinien eines Flächen- oder Raumelementes mit ihren Längen definieren und folgende leicht beweisbare Sätze aufstellen:

„In einer homogenen Dehnungsfläche ist die flächenhaft gemessene Flächendichte der Dehnung doppelt so groß als die linear gemessene, und alle Schubkomponenten der Dehnung sind Null“ (vgl. § 6).

„In einem homogenen Dehnungsraume ist die räumlich gemessene Raumdichte der Dehnung dreimal so groß als die flächenhaft gemessene Raumdichte, und alle Schubkomponenten der Dehnung sind Null“ (vgl. § 7).

Dagegen haben wir jetzt folgenden Vorteil der geometrischen Betrachtung:

„Zur Messung der Dehnungslinien ist keine willkürliche Einheit der Dehnung festzusetzen, während zur Messung der Kraftlinien eine willkürliche Einheit der Kraft benötigt wird. Denn ein Maß für die Dehnung ergibt sich sofort aus dem Verhältnis der Abstandsänderung zweier benachbarter Punkte zu ihrem ursprünglichen Abstande.“

Dieser Vorteil ermöglicht es uns, eine beliebige, z. B. auch eine unendliche, Anzahl Dehnungen in nur drei zueinander senkrechte Scharen von Dehnungslinien aufzulösen und hiermit eine Aufgabe zu beendigen, deren Lösung bei Betrachtung der Kraftlinien unmöglich war. Es ist auch klar, daß sich nach Erledigung dieser Aufgabe die Behandlung des Elastizitätsproblems von selbst ergeben muß.

Das genannte Maß der Dehnung, das Verhältnis der Abstandsänderung zweier benachbarter Punkte zu ihrem ursprünglichen Abstande, wollen wir übrigens mit dem lateinischen Namen „Tensor“ bezeichnen. Es ist eine unbenannte, und dadurch auch von der Größe der willkürlich gewählten Längeneinheit unabhängige Zahl*).

*) Vgl. den Voigt'schen Tensor. W. Voigt, „Die fundamentalen Eigenschaften der Kristalle“; Leipzig 1898, 20 u. f. Ann. d. Phys. **5**, 241 (1901).

§ 28.

Flächendehnung.

Eine beliebige Anzahl beliebig gegebener Dehnungslinienscharen, die übereinandergelagert in einer Fläche verlaufen, lassen sich stets durch zwei zueinander senkrechte (Haupt-) Dehnungslinienscharen von bestimmtem Tensor und bestimmter (Haupt-) Richtung ersetzen.

Der Beweis ergibt sich sofort durch Ausrechnung.

Wir wollen die Größe der gegebenen Dehnungen durch die Tensoren E, F, G . . . bezeichnen und uns ihre Richtungen auch gegeben denken.

Wir betrachten die Dehnung E zunächst allein. Legen wir in die Fläche ein rechtwinkliges Koordinatensystem X′ Y′ so, daß die X′-Achse mit ihrer i′-Richtung in die Richtung der E fällt, so betragen die Vektoren ϵ, welche die Verschiebung der Punkte der Fläche messen: $\epsilon = i' . E . x' \mathbin{\widehat{+}} j' . 0$ (vgl. Fig. 23, in welche die Vektoren ϵ andeutungsweise eingetragen sind).

Wir wollen jedoch, ebenso wie früher, außer der Größe A ein Vektor $\mathfrak{V}$, dessen Betrag $|\mathfrak{V}| = \sqrt{A}$, definiert wurde, auch jetzt wieder zur Vereinfachung der Formeln einen Vektor e, dessen Betrag $|e| = \sqrt{E}$, definieren, der uns zugleich die Richtung der Dehnungslinien angibt (im eben betrachteten einfachen Falle fällt seine Richtung mit der i′-Richtung zusammen), und seine Komponenten in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem X Y mit e_1 und e_2 bezeichnen. Dabei ist zu bemerken, daß, wie früher $\mathfrak{V}$, so jetzt auch e beliebig positives oder negatives Vorzeichen haben kann; und falls E negativ ist, wird auch die Rechnungsgröße e imaginär.

Wir erhalten: $\epsilon = i' . e^2 . x' \mathbin{\widehat{+}} j' . 0.$

Die X′-Achse möge nun mit der X-Achse (= der i-Richtung) des neuen rechtwinkligen Koordinatensystems X Y, mit dem wir rechnen wollen, den Winkel ε bilden. Dann kommt:

$$\text{I.} \quad i' = i . \cos\varepsilon \mathbin{\widehat{+}} j . \sin\varepsilon$$

$$\text{II.} \quad j' = -i . \sin\varepsilon \mathbin{\widehat{+}} j . \cos\varepsilon$$

$$\text{III.} \quad x' = x . \cos\varepsilon + y . \sin\varepsilon$$

$$\text{IV.} \quad y' = -x . \sin\varepsilon + y . \cos\varepsilon.$$

Mit Hilfe I und III findet man:

$$\epsilon = i (e_1^2 . y + e_1 . e_2 . y) \mathbin{\widehat{+}} j (e_1 . e_2 . x + e_2^2 . y).$$

Die Dehnungen F, G . . . mögen entsprechend die Winkel ζ, η . . . mit der i-Richtung bilden, und es seien entsprechend Vektoren

f und g mit den Beträgen $|\mathfrak{f}| = \sqrt{F}, |\mathfrak{g}| = \sqrt{G}$ . . . sowie deren Komponenten f_1, f_2, g_1, g_2 . . . definiert. Dann kommt, wenn der Summations-Verschiebungsvektor mit $\mathfrak{M}_s$ bezeichnet wird:

$$\mathfrak{M}_s = \mathfrak{E} \hat{+} \mathfrak{H} \hat{+} \mathfrak{G} \hat{+} \ldots \quad \mathfrak{i}(S_1 . x + \Sigma . y) \hat{+} \mathfrak{j}(\Sigma . x + S_2 . y) \ldots \quad (6)$$

worin die neuen Tensoren:

$$S_1 \quad e_1^2 + f_1^2 + g_1^2 + \ldots$$
$$S_2 = e_2^2 + f_2^2 + g_2^2 + \ldots$$
$$\Sigma = e_1 . e_2 + f_1 . f_2 + g_1 . g_2 + \ldots \text{ betragen.}$$

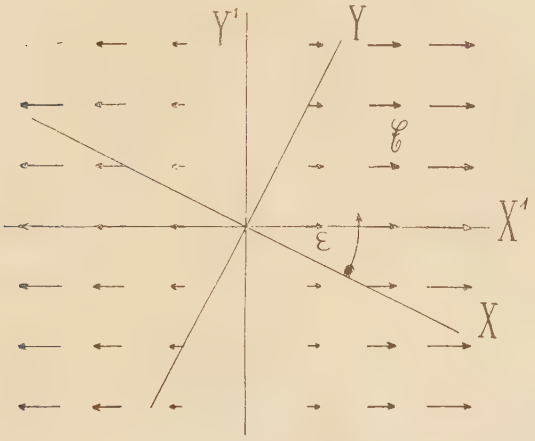

Fig. 23

Für ein anderes, neuerdings um den Winkel plus α in der in Figur 23 durch Pfeil angegebenen Drehrichtung gedrehtes Koordinatensystem entsteht dabei anstatt des Tensors S_1 der Tensor:

$$\begin{aligned} T_1 &= \mathfrak{e}^2 . \cos^2(\varepsilon - \alpha) + \mathfrak{f}^2 . \cos^2(\zeta - \alpha) + \mathfrak{g}^2 . \cos(\eta - \alpha) + \ldots \\ &= \mathfrak{e}^2 [\sin^2\varepsilon \sin^2\alpha + \cos^2\varepsilon \cos^2\alpha + 2 \sin\varepsilon \cos\varepsilon \sin\alpha \cos\alpha] + \ldots \\ &= S_1 . \cos^2\alpha + S_2 . \sin^2\alpha + 2\Sigma_1 . \sin\alpha \cos\alpha, \end{aligned}$$

ebenso anstatt S_2:

$$T_2 = S_1 . \sin^2\alpha + S_2 . \cos^2\alpha + 2\Sigma \sin\alpha \cos\alpha$$

und schließlich anstatt Σ:

$$T = (S_2 - S_1) . \sin\alpha \cos\alpha + \Sigma(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

In den Achsenrichtungen dieses neuen Koordinatensystems mögen nun die beiden gesuchten, zueinander senkrechten, Hauptdehnungen verlaufen, deren Tensoren mit A und B bezeichnet werden mögen. Um dies zu erfüllen, müssen wir setzen:

$$T_1 \quad A = a^2, \; T_2 \quad B = b^2 \text{ und } T = 0,$$

weil $a_2 = 0$ und $b_1 = 0$ sein soll.

Es folgt: $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\Sigma}{S_1 - S_2}$; der Winkel α ist also bekannt, und mit ihm werden auch die Tensoren A und B berechenbar.

Der Beweis dafür, daß die Hauptdehnungen $A = \mathfrak{a}^2$ und $B = \mathfrak{b}^2$ die ursprünglichen Dehnungen $E = \mathfrak{e}^2$, $F = \mathfrak{f}^2$, $G = \mathfrak{g}^2$ . . . zu ersetzen vermögen, erfolgt durch Berechnung des Verschiebungsvektors:

$$\mathfrak{M}_s = \mathfrak{i} \,.\, A \,.\, x \hat{+} \mathfrak{j} \,.\, B \,.\, y \qquad (7)$$

und durch neuerliche Drehung des Koordinatensystems um den Winkel minus α. Man gelangt dadurch, wovon man sich leicht überzeugt, zu den Größen S_1, S_2 und Σ genau zurück.

Sind nur zwei zueinander*) schiefe Dehnungen $E = \mathfrak{e}^2$ und $F = \mathfrak{f}^2$ vorhanden, so kann man die sie ersetzenden zueinander senkrechten Dehnungen $A = \mathfrak{a}^2$ und $B = \mathfrak{b}^2$ mit ihren Richtungen auch leicht geometrisch konstruieren.

Es folgt dann nämlich aus $T = 0$: $+E \,.\, \sin\varepsilon \cos\varepsilon + F \sin\zeta \cos\zeta = 0$.

$$\frac{E}{-F} = \frac{\sin 2\zeta}{\sin 2\varepsilon}, \quad \frac{E-F}{E+F} = \frac{\sin 2\zeta + \sin 2\varepsilon}{\sin 2\zeta - \sin 2\varepsilon} = \frac{\sin(\zeta+\varepsilon)\cos(\zeta-\varepsilon)}{\sin(\zeta+\varepsilon)\sin(\zeta-\varepsilon)},$$

$$\operatorname{tang}(\zeta+\varepsilon) = \frac{E-F}{E+F}\operatorname{tang}(\zeta-\varepsilon).$$

Da $\zeta - \varepsilon$ als Winkel zwischen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ gegeben sein muß, so ergibt sich aus der Formel folgende Konstruktion.

Man zeichne (siehe Fig. 24) die Dehnungen E und F in den Strecken SE und SF nach Größe und Richtung auf, drehe SF um den Winkel $\zeta - \varepsilon$ in die Lage SF′ und verlängere SE über S um sich selbst bis E′. Hierauf ziehe man zu E′ F′ die Parallele ST. Die beiden Halbierenden des Winkels TSE geben die gesuchten Hauptrichtungen. Durch Lotung von E auf SA und von da wieder zurück auf SE, und durch Lotung von F auf SA und von da wieder zurück auf SF, und durch Zusammensetzung der so gefundenen Strecken $SE\cos^2\varepsilon + SF\cos^2\zeta$ findet man den Tensor A der Größe nach. Entsprechend kann man auch den Tensor B, durch eine Strecke dargestellt, auffinden.

Sind auf SE und SF die Vektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ abgetragen, so werden die durch Lotung entstehenden schraffierten Rechtecke einander flächen-

*) Anmerkung. Diese zueinander schiefen Dehnungen dürfen nicht mit „schiefwinkligen Dehnungen“ (vgl. Weber und Wellstein, **3**, 1, § 8) verwechselt werden, bei denen die Dehnungsrichtung schief gegen die die Fläche klemmende Backen steht.

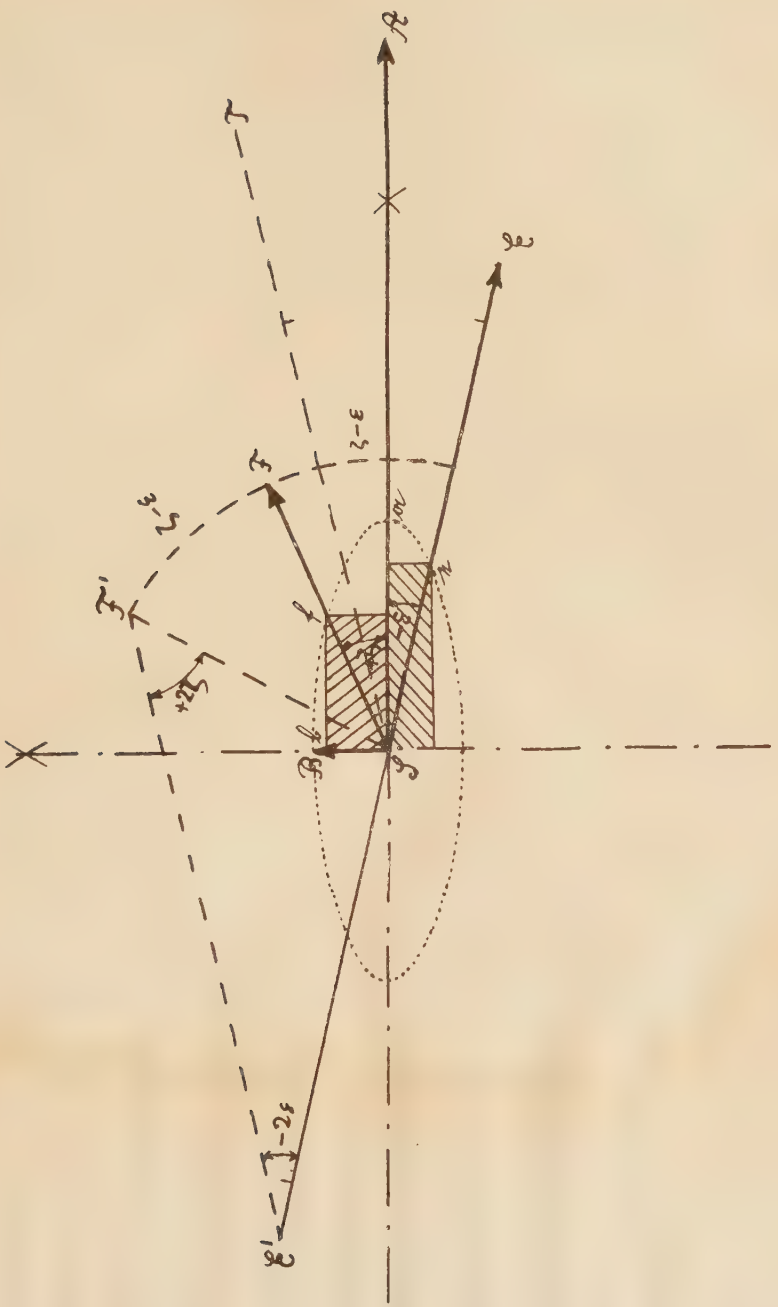

Fig. 24

gleich (vgl. Ausgangsformel). Außerdem sind dadurch $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ konjugierte Halbmesser einer Ellipse mit den Halbachsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$*).

Ist eine der beiden gegebenen Dehnungen E oder F negativ, so hat man zu F′ E durch S die Parallele ST′ zu ziehen. Die Halbierenden des Winkel T′SE ergeben dann die Hauptrichtungen; A und B findet man hier durch Subtraktion von Strecken.

Natürlich kann man vom Ergebnis A|B eine homogene Dehnungsfläche B|B abziehen, so daß nur eine einfache Dehnung A − B|0 übrig bleibt, und hierzu wieder eine dritte Dehnung G durch Wiederholung der geschilderten geometrischen Konstruktion hinzufügen usw.

§ 29.

Raumdehnung.

Liegen mehrere Dehnungen $E=\mathfrak{e}^2$, $F=\mathfrak{f}^2$, $G=\mathfrak{g}^2$ . . . im Raum vor, so lassen sich wie in § 28 die Komponenten berechnen.

Zunächst möge in einem rechtwinkligen Koordinatensystem X′Y′Z′ eine einzige Dehnung $E=\mathfrak{i}'.\mathfrak{e}^2.x'\mathbin{\hat{+}}\mathfrak{j}'.0+\mathfrak{k}'.0$ vorliegen.

Mit Hilfe der Formeln:

V. $\mathfrak{i}'=\mathfrak{i}\,\alpha_1+\mathfrak{j}\,\alpha_2\mathbin{\hat{+}}\mathfrak{k}\,\alpha_3$

VI. $\mathfrak{j}'=\mathfrak{i}\,\beta_1\mathbin{\hat{+}}\mathfrak{j}\,\beta_2\mathbin{\hat{+}}\mathfrak{k}\,\beta_3$

VII. $\mathfrak{k}'=\mathfrak{i}\,\gamma_1\mathbin{\hat{+}}\mathfrak{j}\,\gamma_2\mathbin{\hat{+}}\mathfrak{k}\,\gamma_3$

VIII. $x'=x\,\alpha_1+y\,\alpha_2+z\,\alpha_3$

IX. $y'=x\,\beta_1+y\,\beta_2+z\,\beta_3$

X. $z'=x\,\gamma_1+y\,\gamma_2+z\,\gamma_3$,

	X	Y	Z
X′	α_1	α_2	α_3
Y′	β_1	β_2	β_3
Z′	γ_1	γ_2	γ_3

in denen die $\alpha\beta\gamma$ die Kosinus der Winkel bedeuten, welche die Achsen eines zweiten Koordinatensystems XYZ mit den Achsen X′Y′Z′ in der im nebenstehenden Schema angegebenen Weise miteinander bilden, kann man wieder die Koordinatentransformation vornehmen. Setzt man die Komponenten $\mathfrak{e}\cos\alpha_1=e_1$, $\mathfrak{e}\cos\alpha_2=e_2$, $\mathfrak{e}\cos\alpha_3=e_3$, so kommt mit Hilfe V und VIII:

$$\mathfrak{E}=\mathfrak{i}\,(e_1^2.x+e_1e_2.y+e_1e_3.z)\mathbin{\hat{+}}\mathfrak{j}\,(e_1e_2.x+e_2^2.y+e_2e_3.z)\mathbin{\hat{+}}\mathfrak{k}\,(e_1e_3.x+e_2e_3.y+e_2^2z).$$

Allgemein erhält man so für mehrere Dehnungen E, F, G, . . . :

$$\mathfrak{M}_s=\mathfrak{E}\mathbin{\hat{+}}\mathfrak{F}\mathbin{\hat{+}}\mathfrak{G}\ \ldots=\mathfrak{i}\,(S_1.x+\Sigma_3y+\Sigma_2z)\mathbin{\hat{+}}\mathfrak{j}\,(\Sigma_3.x+S_2.y+\Sigma_1.z)\mathbin{\hat{+}}\mathfrak{k}\,(\Sigma_2.x+\Sigma_1.y+S_3.z),\qquad(8)$$

*) Daß in Figur 24 SB = b erscheint, ist natürlich nur ein Zufall. SB ergab sich als genau 1 cm, und hieraus folgte, daß auch b als $\sqrt{1}$ cm = 1 cm eingetragen werden mußte.

worin unter Bildung je dreier Komponenten mit den Indizes 1 2 3 für jede der ursprünglichen Dehnungen $E = e^2$, $F = f^2$, $G = g^2$ . . . die Tensoren zu setzen sind:

$$S_1 = e_1^2 + f_1^2 + g_1^2 + \ldots \qquad \Sigma_1 = e_2 e_3 + f_2 f_3 + g_2 g_3 + \ldots$$
$$S_2 = e_2^2 + f_2^2 + g_2^2 + \ldots \qquad \Sigma_2 = e_1 e_3 + f_1 f_3 + g_1 g_3 + \ldots$$
$$S_3 = e_3^2 + f_3^2 + g_3^2 + \ldots \qquad \Sigma_3 = e_1 e_2 + f_1 f_2 + g_1 g_2 + \ldots$$

Das Ergebnis wollen wir symbolisch auch so schreiben:

$$\overline{\mathfrak{M}}_s = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_{s1} & S_1 & \Sigma_3 & \Sigma_2 \\ \hline M_{s2} & \Sigma_3 & S_2 & \Sigma_1 \\ \hline M_{s3} & \Sigma_2 & \Sigma_1 & S_3 \\ \hline \end{array} \qquad (9)$$

Ein solches Symbol ersetzt neun Gleichungen, indem es die Werte tabellarisch zusammenfaßt, die sich ergeben, wenn an den in der ersten Rubrik links stehenden Komponenten (M_{s1}, M_{s2} und M_{s3}) die in der Kopfreihe angegebener Operationen $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right.$ und $\left.\frac{\partial}{\partial z}\right)$ ausgeführt werden (z. B. $\frac{\partial M_{s2}}{\partial z} = \Sigma_1$).

In 9 sind nun die tabellarisch angegebenen Werte in dieser Weise aus Gleichung 8, wie unmittelbar ersichtlich, abgeleitet, und es ist nur zu bemerken, daß der Strich über $\mathfrak{M}_s$ daran erinnern soll, daß eventuell ein absolutes Glied zu $\overline{\mathfrak{M}}_s$ zu addieren ist, mag dieses uns nach § 1 auch nicht weiter interessieren.

Aus 9 geht wieder hervor, daß $\mathfrak{M}_s$ kein allgemeiner, sondern ein spezieller Vektor ist. Bei einem allgemeinen Vektor würde man bei der oben eingeführten Bezeichnungsart, die man „Tensordarstellung“ nennt, erhalten:

$$\overline{\mathfrak{M}} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_1 & \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \hline M_2 & \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \hline M_3 & \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \\ \hline \end{array} \qquad (9a)$$

Hierin sind im allgemeinen Falle alle neun μ voneinander verschiedene Größen. Die spezielle Beschaffenheit von $\mathfrak{M}_s$ drückt sich also durch

die Gleichungen $\mu_{23} = \mu_{32}$, $\mu_{13} = \mu_{31}$, $\mu_{12} = \mu_{21}$ aus. Man drückt dies mit Worten so aus, daß gesagt wird, der Vektor $\mathfrak{M}_s$ habe einen symmetrischen Tensor*).

Um die Bedeutung der S und Σ näher kennen zu lernen, berechnen wir die Größe, die wir „flächenhaft gemessene Raumdichte“ oder „Normalkomponente der Dehnung“ genannt haben. Wir zerschneiden den Raum durch eine Maßfläche, die mit der YZ-Ebene des Koordinatensystems zusammenfällt. Die dann in die i-Richtung fallende Normalkomponente kann man mit Hilfe der Formel:

$$\mathfrak{N}\mathfrak{i} = \mathfrak{i}\{\mathfrak{i}[\mathfrak{e}(\mathfrak{e}.\mathfrak{i})]\} \qquad (10)$$

finden, wenn nur eine Dehnung $E = e^2$ vorliegt. In dieser Formel entstehen übrigens durch Ausführung der in den Klammern angegebenen Multiplikationen abwechselnd skalare Produkte und Vektoren. Führt man die Formel aus, so kommt:

$$\mathfrak{N}_i = \mathfrak{i} \cdot e_1^2, \text{ und analog } \mathfrak{N}_j = \mathfrak{j} \cdot e_2^2, \ \mathfrak{N}_k = \mathfrak{k} \cdot e_3^2.$$

Rechnet man dieselbe Formel für $F = f^2$, $G = g^2$ . . . durch und addiert, so kommt:

$$\mathfrak{N}_i = \mathfrak{i} \cdot S_1, \ \mathfrak{N}_j = \mathfrak{j} \cdot S_2, \ \mathfrak{N}_k = \mathfrak{k} \cdot S_3.$$

Die Bedeutung der S geht hieraus hervor.

Zur Berechnung der Schubkomponente $\mathfrak{L}_i$ kann man sich der Formel:

$$\mathfrak{L}_i = \mathfrak{V}\mathfrak{i}\left\{\mathfrak{V}\mathfrak{i}\left[\mathfrak{V}\mathfrak{e}\left(\mathfrak{V}\mathfrak{e}.\mathfrak{i}\right)\right]\right\} \qquad (11)$$

bedienen. In dieser Formel entstehen durch Ausführung der in den Klammern angegebenen Multiplikationen Vektoren, die abwechselnd zu der durch die Vektoren e und i bestimmten Ebene senkrecht stehen oder in ihr liegen. Es geht daraus schließlich hervor, daß $\mathfrak{L}_i$ selbst, wie verlangt, in diese Ebene fällt. Man erhält daher auch:

$$\mathfrak{L}_i = \mathfrak{j} \cdot e_1 e_2 \hat{+} \mathfrak{k} \cdot e_1 e_3, \text{ und analog } \mathfrak{L}_j = \mathfrak{k} \cdot e_2 e_3 \hat{+} \mathfrak{i} \cdot e_1 e_2,$$

$$\mathfrak{L}_k = \mathfrak{i} \cdot e_1 e_3 \hat{+} \mathfrak{j} \cdot e_2 e_3.$$

Rechnet man dieselbe Formel für $F = f^2$, $G = g^2$ . . . durch und addiert, so kommt:

$$\mathfrak{L}_i = \mathfrak{j}\Sigma_3 \hat{+} \mathfrak{k}\Sigma_2, \ \mathfrak{L}_j = \mathfrak{k}\Sigma_1 \hat{+} \mathfrak{i}\Sigma_3, \ \mathfrak{L}_k = \mathfrak{i}\Sigma_2 \hat{+} \mathfrak{j}\Sigma_1.$$

Hieraus geht nun auch die Bedeutung der Σ hervor. Man hätte dasselbe Resultat auch mit einfacheren Hilfsmitteln finden können, doch hätte dann die Allgemeingültigkeit unserer Sätze eines besonderen Beweises bedurft. Durch Anwendung der Formeln 10 und 11, welche

*) Vgl. R. H. Weber, „Ueber asymmetrische und symmetrische Tensoren“, Gött. Nachr. 1909, u. Weber u. Wellstein, Elementarmathematik **3a**, 18.

auch richtig bleiben, wenn die Maßfläche zum Koordinatensytem schräg liegt und i den zu ihr senkrechten Einheitsvektor bedeutet, ist derselbe in Fortfall gekommen.

Der gegebene mathematische Apparat sei noch durch folgende Formeln vervollständigt, die man mit Hilfe V bis X bei Drehung des Koordinatensystems um die X-Achse um den Winkel plus ξ erhält:

$$\overline{\mathfrak{M}}_s = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_{s1} & S_1 & \Sigma_3 \cos\xi + \Sigma_2 \sin\xi & \Sigma_2 \cos\xi - \Sigma_3 \sin\xi \\ \hline M_{s2} & \Sigma_3 \cos\xi + \Sigma_2 \sin\xi & S_2 \cos^2\xi + S_3 \sin^2\xi + 2\Sigma_1 \sin\xi \cos\xi & \Sigma_1(\cos^2\xi - \sin^2\xi) + (S_3 - S_2)\sin\xi\cos\xi \\ \hline M_{s3} & \Sigma_2 \cos\xi - \Sigma_3 \sin\xi & \Sigma(\cos^2\xi - \sin\xi) + (S_3 - S_2)\sin\xi\cos\xi & S_3 \cos^2\xi + S_2 \sin^2\xi - 2\Sigma_1 \sin\xi \cos\xi \\ \hline \end{array} \quad (12)$$

Dieses Symbol zeigt auch die Formeln an, die bei einer Drehung des Koordinatensystems um die Y-Achse um den Winkel plus η bez. um die Z-Achse um den Winkel plus ζ gelten, wenn man ξ mit η bez. ζ vertauscht, in der ersten Rubrik links und in der Tabelle die Indizes um 1 erhöht bez. erniedrigt, und in der Kopfreihe ∂x mit ∂y, ∂y mit ∂z, ∂z mit ∂x bez. umgekehrt vertauscht.

§ 30.

Spezieller Fall.

Liegen drei zueinander senkrechte Dehnungen $A = a^2$, $B = b^2$, $C = c^2$ vor, die in den Achsenrichtungen eines Koordinatensystems fallen, so ist:

$$\overline{\mathfrak{M}}_s = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_{s1} & A & 0 & 0 \\ \hline M_{s2} & 0 & B & 0 \\ \hline M_{s3} & 0 & 0 & C \\ \hline \end{array} \quad (13)$$

Dreht man das Koordinatensystem um die X-Achse um den Winkel ξ, so kommen mit Hilfe 12 folgende Tensoren P und Π, welche

Buchstaben jetzt speziell für S und Σ gesetzt sind, um deren allgemeinen Charakter zu wahren:

$$\begin{aligned} P_1 &= A \\ P_2 &= B\cos^2\xi + C\sin^2\xi \\ P_3 &= B\sin^2\xi + C\cos^2\xi \\ \Pi_1 &= (C-B)\sin\xi\cos\xi \\ \Pi_2 &= \Pi_3 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Dreht man das Koordinatensystem jetzt weiter um die Y-Achse um den Winkel plus η, so kommen mit Hilfe 12 folgende Tensoren T und T:

$$\begin{aligned} T_1 &= A\cos^2\eta + P_3\sin^2\eta \\ T_2 &= B\cos^2\xi + C\sin^2\xi \\ T_3 &= A\sin^2\eta + P_3\cos^2\eta \\ T_1 &= (C-B)\sin\xi\cos\xi\cos\eta \\ T_2 &= (A-P_3)\sin\eta\cos\eta \\ T_3 &= (B-C)\sin\xi\cos\xi\sin\eta \end{aligned} \tag{15}$$

Die allgemeine Lage des Koordinatensystems erhalten wir aber erst, wenn wir es auch noch um die Z-Achse um den Winkel plus ζ drehen.

Rechnet man auch hier die Tensoren S und Σ mit Hilfe 12 aus und setzt speziell $A = B = C$, so findet man bei Durchrechnung sofort $S_1 = S_2 = S_3 = A$ und $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = 0$, so daß also dann der Charakter 13 durch die dreifache Drehung gar nicht geändert erscheint. Die diesbezüglichen Sätze in § 7 und 27 sind damit auch bewiesen.

§ 31.

Satz.

Eine Anzahl beliebiger gegebener, schiefer Dehnungen, die im Raum verlaufen, lassen sich stets durch drei zueinander senkrechte (Haupt-) Dehnungen von bestimmtem Tensor und bestimmten (Haupt-) Richtungen ersetzen.

Der Beweis ergibt sich auch hier durch Ausrechnung.

Diese letztere ließe sich z. B. dadurch ausführen, daß man in Gleichung 11 die Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{i}$ als variabel annimmt und die Gleichung $\mathfrak{L}_i = 0$ nach der gesuchten Richtung $\mathfrak{i}$ auflöst.

Doch ist, wenn obiger Satz richtig ist, ersichtlich, daß es dann sechs Lösungen geben muß. Die aus neun Gliedern bestehende Formel 11 wird also auch noch sechsten Grades. Unter diesen Verhältnissen erscheint die Trennung der drei unbekannten Winkel voneinander schwierig.

Es ist deshalb praktischer, das Koordinatensystem des vorigen Paragraphen aus der allgemeinen Lage in die spezielle zurückzudrehen. Dabei kommen die Winkel minus ζ, minus η und minus ξ in Frage. Leicht ist ξ bez. η aus 14 bez. 15 zu bestimmen:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang} 2\xi = \frac{\Pi_1}{P_3 - P_2}, \quad \operatorname{tang}\eta = -\frac{T_3}{T_1} \tag{16}$$

Zur Bestimmung von ζ seien zunächst aus 12 folgende Formeln aufgestellt, die sich bei einer Drehung des Koordinatensystems aus der allgemeinen Lage um minus ζ ergibt:

$$\begin{aligned}
T_1 &= S_1\cos^2\zeta + S_2\sin^2\zeta - 2\Sigma_3\sin\zeta\cos\zeta\\
T_2 &= S_1\sin^2\zeta + S_2\cos^2\zeta + 2\Sigma_3\sin\zeta\cos\zeta\\
T_3 &= S_3\\
T_1 &= \Sigma_1\cos\zeta + \Sigma_2\sin\zeta\\
T_2 &= -\Sigma_1\sin\zeta + \Sigma_2\cos\zeta\\
T_3 &= (S_1 - S_2)\sin\zeta\cos\zeta + \Sigma_3(\cos^2\zeta - \sin^2\zeta)
\end{aligned} \tag{17}$$

Zur Berechnung von ζ steht jetzt aus 15 die identische Gleichung:

$$\frac{T_2}{T_1 T_3} = \frac{T_3 - T_1}{T_1^2 - T_3^2}$$

zur Verfügung. Setzt man hierin statt P und Π vielmehr nach 17 die Größen S und Σ ein, so erhält man nach längerer Rechnung:

$$-\operatorname{tang}\zeta = \frac{K + Lw}{M + Nw} \tag{18}$$

worin $w = \frac{1}{2}\operatorname{tang} 2\zeta$ und:

$$\begin{aligned}
K &= \Sigma_2\Sigma_3^2 + \Sigma_1\Sigma_3(S_3 - S_1) - \Sigma_1^2\Sigma_2\\
M &= \Sigma_1\Sigma_3^2 - \Sigma_2\Sigma_3(S_3 - S_2) - \Sigma_1\Sigma_2^2\\
L &= [\Sigma_2\Sigma_3 + \Sigma_1(S_3 - S_1)]\ (S_1 - S_2) - \Sigma_1(\Sigma_2^2 - \Sigma_1^2)\\
N &= [\Sigma_1\Sigma_3 + \Sigma_3(S_3 - S_2)]\ (S_1 - S_2) - \Sigma_2(\Sigma_2^2 - \Sigma_1^2)
\end{aligned}$$

zu setzen ist.

Durch Auflösung des Bruches nach ζ erhält man schließlich die Gleichung:

$$\operatorname{tg}^3\zeta\, M + \operatorname{tg}^2\zeta\,(K - N) - \operatorname{tg}\zeta\,(L + M) - K = 0. \tag{19}$$

Wenn mit Hilfe der Formeln 18 oder 19 einer der drei Werte von ζ gefunden ist, kann man leicht weiterhin η und ξ, sowie auch die Haupttensoren A, B und C selbst berechnen. Der Beweis für die Richtigkeit der Rechnung ist durch erneute Rückdrehung des Koordinatensystems in die allgemeine Lage zu führen, da man hierbei auf die Ausgangsgrößen S und Σ zurückkommt.

§ 32.
Schiebungen.

Der Vektor $\mathfrak{M}_s$, den wir durch Summation beliebiger Dehnungen erhalten haben, verliert seine spezielle symmetrische Form 9, wenn wir auch noch Schiebungen annehmen.

Dieselben kennzeichnen sich dadurch, daß sie, im Gegensatz zu den Dehnungen, in dem durch sie deformierten Flächenteil oder Körper keine Flächeninhalts- oder Volumenänderung, sondern nur Winkeländerungen hervorbringen.

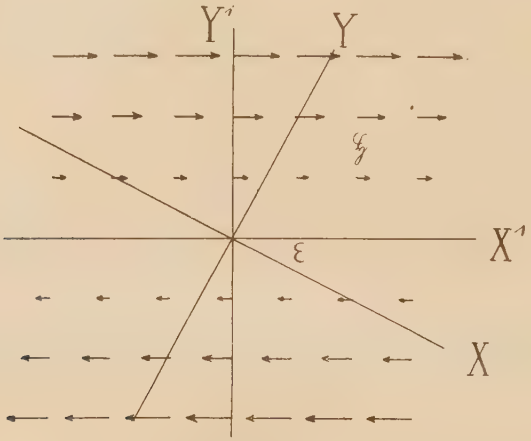

Fig. 25

Eine Schiebung sei im rechtwinkligen Koordinatensystem XY mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{i}'.H.y \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{j}'.0$ gegeben (vgl. Fig. 25). Durch Transformation auf ein andres rechtwinkliges Koordinatensystem XY findet man mit Hilfe I und IV, wenn man wieder $\mathfrak{h}^2 = H$ definiert und mit h_1 und h_2 die beiden Komponenten von $\mathfrak{h}$ bezeichnet:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{i}\,(-h_1 h_2 + h_1^2 y) \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{j}\,(-h_2^2 x + h_1 h_2 y),$$

also allgemein:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{K} \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{L} \mathbin{\hat{+}} \ldots = \mathfrak{i}(-\nu x + n_1 y) \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{j}(-n_2 x + \nu y), \text{ worin:}$$

$$n_1 = h_1^2 + k_1^2 + l_1^2 + \ldots, \quad n_2 = h_2^2 + k_2^2 + l_2^2 + \ldots,$$

$$\nu = h_1 h_2 + k_1 k_2 + l_1 l_2 + \ldots$$

zu setzen ist.

Hieraus geht wieder hervor, daß es in der Ebene zwei bestimmte Hauptrichtungen gibt, für welche die Größe ν verschwindet. Man kann also den Satz aufstellen: Schiebungen, die in eine Ebene fallen, lassen sich immer durch zwei zueinander senkrechte Schiebungen von bestimmter Größe und Richtung ersetzen.

Das Entsprechende gilt nicht vom Raum. Dies zeigt sich sofort, wenn man eine Raumschiebung $\mathfrak{H} = i' . H . y' \hat{+} j' . 0 \hat{+} k' . 0$ mit Hilfe V bis X transformiert und wenn man dann mehrere derartige Raumschiebungen addiert. Es rührt daher, daß, während in der Ebene nach Obigem mit $\mathfrak{h}$ stets zugleich die Gerade gegeben ist, in der $\mathfrak{H} = 0$, zur Angabe einer räumlichen Schiebung die Richtung und Größe des Vektors $\mathfrak{h}$ mit dem Betrag $|\mathfrak{h}| = \sqrt{H}$ nicht genügt; es muß auch noch eine die Richtung $\mathfrak{h}$ enthaltende Ebene gegeben sein, in der $\mathfrak{H}$ überall Null ist.

Bei den Dehnungen ist eine solche entsprechende Ebene mit der Richtung von $\mathfrak{e}$ z. B. stets zugleich gegeben, nämlich als die zur Richtung $\mathfrak{e}$ im Koordinatenanfangspunkt senkrecht errichtete Ebene.

Während man also bei den Dehnungen die Beziehungen 9 setzen konnte, so treffen diese nicht mehr ohne weiteres zu, wenn außer den Dehnungen auch noch Schiebungen vorhanden sind.

§ 33.
Satz.

Jede Schiebung läßt sich durch zwei zueinander senkrechte entgegengesetzt gleiche Dehnungen und eine Drehung ersetzen.

Beweis. Für den Vektor $\mathfrak{H}$ des vorigen Paragraphen läßt sich auch schreiben:

$$\mathfrak{H}_s = i' \cdot \frac{H}{2} y' \hat{+} j' \cdot \frac{H}{2} x', \quad \mathfrak{H}_d = i' \cdot \frac{H}{2} y' \hat{-} j' \cdot \frac{H}{2} x', \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_s \hat{+} \mathfrak{H}_d .$$

Führt man dies zeichnerisch aus, so erhält man andeutungsweise die Fig. 26 und 27.

Transformieren wir $\mathfrak{H}_s$ und $\mathfrak{H}_d$ auf ein neues Koordinatensystem mit Hilfe I bis IV, so erhalten wir:

$$\mathfrak{H}_s = i \left(- h_1 h_2 x + \frac{1}{2} [h_1^2 - h_2^2] y \right) \hat{+} j \left(\frac{1}{2} [h_1^2 - h_2^2] x + h_1 h_2 y \right)$$

$$\mathfrak{H}_d = i \frac{1}{2} (h_1^2 + h_2^2) y \hat{-} j \frac{1}{2} (h_1^2 + h_2^2) x = i \frac{H}{2} y \hat{-} j \frac{H}{2} x .$$

$\mathfrak{H}_d$ wird also durch die Drehung des Koordinatensystems überhaupt nicht beeinflußt, es stellt, wie auch Fig. 27 zeigt, selbst eine Drehung, und zwar um den Drehwinkel $w = -\frac{H}{2}$ dar.

Setzt man den Winkel, den das neue Koordinatensystem XY mit X′Y′ bildet, gleich -45^0 (vgl. Fig. 26), so wird $h_1 = -h_2$, $h_1^2 = h_2^2$ und es kommt $\mathfrak{H}_s = i \frac{H}{2} x \hat{+} j \left(-\frac{H}{2} \right) y$.

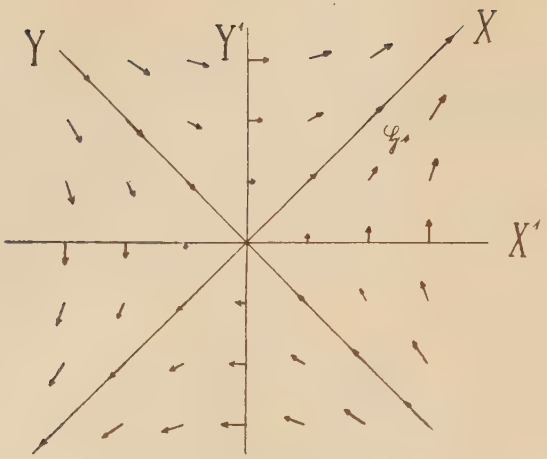

Fig. 26

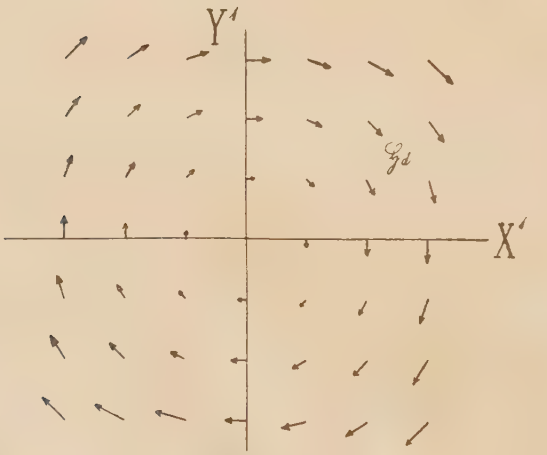

Fig. 27

$\mathfrak{H}_s$ läßt sich also durch zwei zueinander senkrechte Dehnungen mit den Tensoren $\frac{H}{2}$ und $-\frac{H}{2}$ ersetzen. Führt man dies probeweise durch, so erhält man aus:

$$\mathfrak{H}_s = i' \cdot \frac{H}{2} x' \hat{} j' \cdot \frac{H}{2} y'$$

mit Hilfe I bis IV bei einer Drehung des Koordinatensystems um $45^0 + \varepsilon$ nach Durchrechnung:

$$\mathfrak{H}_s = i \left(-h_1 h_2 x + \frac{1}{2} [h_1^2 - h_2^2] y \right) \hat{+} j \left(\frac{1}{2} [h_1^2 - h_2^2] x + h_1 h_2 y \right).$$

Da wir hiermit zur Ausgangsformel zurückgelangt sind, dürfen wir schließen, daß der genannte Ersatz von $\mathfrak{H}_s$ durch zwei Dehnungen für jedes Achsensystem zulässig ist.

Hieraus geht wieder hervor, daß jede aller eventuell vorkommenden Schiebungen in je zwei Dehnungen und je eine Drehung zerlegt werden kann. Da diese neu hinzukommenden Dehnungen unser früher gewonnenes Bild jedoch nicht verändern, bleibt allein die Aufgabe übrig, die Kombinationen verschiedener Drehungen zu untersuchen.

§ 34.

Drehungen.

Wir setzen, vgl. § 33, für eine Rechtsdrehung im Rechtssystem:

$$\mathfrak{M}_d = -\mathfrak{i}' \cdot D \cdot y' + \mathfrak{j}' \cdot D \cdot x' + \mathfrak{k}' \cdot 0.$$

Mit Hilfe V bis X erhalten wir hieraus:

$$\mathfrak{M}_d = D \{ \mathfrak{i} [(\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) y + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) z] + \mathfrak{j} [\ldots] + \mathfrak{k} [\ldots] \}$$
$$= \mathfrak{i} D (\gamma_2 z - \gamma_3 y) + \mathfrak{j} D (\gamma_3 x - \gamma_1 z) + \mathfrak{k} D (\gamma_1 y - \gamma_2 x).$$

Diese Formel zeigt, daß $\mathfrak{M}_d$ außer von D nur von dem Winkel zwischen der Drehachse Z' und den Koordinatenachsen abhängig ist. Wir können uns D als einen Vektor $\mathfrak{D}$ in Richtung Z' gegeben denken. Nennen wir seine Komponenten D_1, D_2 und D_3, so kommt die bekannte Formel:

$$\mathfrak{M}_d = \mathfrak{i} (D_2 z - D_3 y) + \ldots = \mathfrak{V} \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{r},$$

worin $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor bezeichnet, der vom Koordinatenanfangspunkt nach dem Aufpunkt xyz im Raum gezogen ist.

Nach den Rechenregeln der Vektorprodukte addieren sich nun mehrere Drehungen durch einfache geometrische Addition der einzelnen Drehungsvektoren zu einem einzigen Drehungsvektor $\mathfrak{D}$. Wir dürfen also schreiben:

$$\mathfrak{M}_d = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_{d1} & 0 & -D_3 & +D_2 \\ \hline M_{d2} & +D_3 & 0 & -D_1 \\ \hline M_{d3} & -D_2 & +D_1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad (20)$$

Wir erhalten jetzt einen ganz allgemeinen Vektor $\mathfrak{M}$, wenn wir setzen $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_s \hat{+} \mathfrak{M}_d$ (vgl. 9 und 20). Dieser schreibt sich dann:

$$\overline{\mathfrak{M}} = \begin{array}{c|c|c|c} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_1 & S_1 & \Sigma_3 - D_3 & \Sigma_2 + D_2 \\ \hline M_2 & \Sigma_3 + D_3 & S_2 & \Sigma_1 - D_1 \\ \hline M_3 & \Sigma_2 - D_2 & \Sigma_1 + D_1 & S_3 \end{array} \tag{21}$$

Hieraus geht wieder hervor, daß man aus einem allgemeinen Vektor $\mathfrak{M}$ (vgl. 9a) sofort die Drehung wie folgt abspalten kann:

$$D = i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_3}{\partial y} - \frac{\partial M_2}{\partial z}\right) \hat{+} \ldots = \frac{1}{2}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{M}.$$

Hiermit sind aber jetzt auch die Tensoren Σ bekannt als:

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_3}{\partial y} + \frac{\partial M_2}{\partial z}\right),\quad \Sigma_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_1}{\partial z} + \frac{\partial M_3}{\partial x}\right),\quad \Sigma_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_2}{\partial x} + \frac{\partial M_3}{\partial y}\right). \tag{22}$$

Es folgt, daß sich mit Hilfe der vorhergegangenen Rechnungen für jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{M}$ überall im Raum drei zueinander senkrechte Hauptrichtungen und eine Drehachsenrichtung angeben lassen.

§ 35.

Beispiel.

Aufgabe: Die drei Hauptrichtungen und die Drehachsenrichtung für einen Vektor $\mathfrak{M}$ zu bestimmen, der folgende Komponente hat:

$$M_1 = a.y.z,\quad M_2 = -a.x.z,\quad M_3 = 0.$$

Dieser Vektor stellt die Verschiebung der Punkte eines Zylinders dar, der die Z-Achse des Koordinatensystems zur Achse hat und eine Torsion erleidet. Man erhält hier:

$$\mathfrak{M} = \begin{array}{c|c|c|c} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_1 & 0 & az & ay \\ \hline M_2 & -az & 0 & -ax \\ \hline M_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Hieraus folgt $\mathfrak{D} = i\frac{a}{2}x \mathbin{\hat{+}} j\frac{a}{2}y \mathbin{\hat{=}} k\,a\,z$, sowie:

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_s = \begin{array}{c|c|c|c} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_{s1} & 0 & 0 & \frac{1}{2}a\,y \\ \hline M_{s2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a\,x \\ \hline M_{s3} & \frac{1}{2}a\,y & -\frac{1}{2}a\,x & 0 \end{array}$$

Nach Formel 18 ergibt sich hieraus $-\frac{x}{y} = \tan\zeta$, nachdem sich die übrigen Faktoren des Zählers und Nenners gekürzt haben.

Die eine Hauptrichtung erhält man also, wenn man vom Aufpunkt auf die Zylinderachse Z das Lot fällt.

Durch Drehung des Koordinatensystems um minus ζ erhält man mit Hilfe 12:

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_s = \begin{array}{c|c|c|c} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_{s1} & 0 & 0 & \frac{1}{2}a\,.\,r \\ \hline M_{s2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline M_{s3} & \frac{1}{2}a\,.\,r & 0 & 0 \end{array}$$

Hierin ist für $\sqrt{x^2+y^2} = r$ geschrieben. Die Formel 12 zeigt nun hinsichtlich des Verschwindens von Σ_2 die neue Bedingung $(\cos^2\eta - \sin^2\eta) = 0$, woraus folgt $\eta = 45^0$.

Die Vornahme einer neuen Drehung um minus 45^0 ergibt mit Hilfe 12:

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_s = \begin{array}{c|c|c|c} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_{s1} & +\frac{1}{4}a\,.\,r & 0 & 0 \\ \hline M_{s2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline M_{s3} & 0 & 0 & -\frac{1}{4}a\,.\,r \end{array}$$

Die Dehnungslinien verlaufen also unter 45^0 zur Achse parallel der Zylinderoberfläche und nehmen mit dem Radius zu.

§ 36.

Zerlegung eines Vektors $\mathfrak{M}$ in einen divergenz- und wirbelfreien Vektor $\mathfrak{M}_f$ und einen Restvektor $\mathfrak{M}_r$.

Diese Zerlegung ist für unsere späteren Rechnungen zweckmäßig. Um sie auszuführen, haben wir nur zu bedenken, daß wir zu den Tensoren S_1, S_2 und S_3 zugleich eine beliebige Größe addieren dürfen, ohne Σ_1, Σ_2 und Σ_3 zu verändern. Denn eine solche Größe stellt nur einen homogenen Dehnungsraum dar, dessen Schubkomponenten sämtlich Null sind (§ 27 und 30). Subtrahieren wir also von jeder dieser Größen $\frac{\Theta}{3}$, wobei wir die räumlich gemessene Raumdichte der Dehnung $S_1 + S_2 + S_3 = \operatorname{div} \mathfrak{M} = \Theta$ setzen wollen, so finden wir mit:

$$\overline{\mathfrak{M}}_f = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_{f1} & S_1 - \frac{1}{3}\Theta & \Sigma_3 & \Sigma_2 \\ \hline M_{f2} & \Sigma_3 & S_2 - \frac{1}{3}\Theta & \Sigma_1 \\ \hline M_{f3} & \Sigma_2 & \Sigma_1 & S_3 - \frac{1}{3}\Theta \\ \hline \end{array} \qquad (23)$$

einen Vektor $\mathfrak{M}_f$ bezeichnet, der weder Divergenz noch Wirbel besitzt.

Spaltet man $\mathfrak{M}_f$ von $\mathfrak{M}$ (vgl. 21 und 23) ab, so behält man als Rest:

$$\overline{\mathfrak{M}}_r = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_{r1} & \frac{1}{3}\Theta & -D_3 & +D_2 \\ \hline M_{r2} & +D_3 & \frac{1}{3}\Theta & -D_1 \\ \hline M_{r3} & -D_2 & +D_1 & \frac{1}{3}\Theta \\ \hline \end{array} \qquad (24)$$

§ 37.

Tensor zweiten Grades.

In unseren späteren Rechnungen stellt sich die Notwendigkeit ein, die Tensoren von $\mathfrak{M}$ nach dx, dy und dz zu differentiieren.

Hierdurch kommt eine doppelte Differentiation der Komponenten M_1, M_2 und M_3 zustande. Offenbar muß nun die Reihenfolge der Differentiationen beliebig sein, es muß z. B.:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial M_1}{\partial z}$$

gelten. Da dieser Zusammenhang jedoch nicht in den bisher angeschriebenen Tensoren enthalten ist, wollen wir die letzteren immer als konstant ansehen und die Variationen in einem 27fachen Tensorfeld zweiten Grades wie folgt anschreiben:

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline & & p_1\,dx & \pi_3\,dx & \pi_2\,dx \\ & M_1 & +\pi_3\,dy & +p_2\,dy & +\pi_1\,dy \\ & & +\pi_2\,dz & +\pi_1\,dz & +p_3\,dz \\ \hline & & r_1\,dx & \varrho_3\,dx & \varrho_2\,dx \\ & M_2 & +\varrho_3\,dy & +r_2\,dy & +\varrho_1\,dy \\ & & +\varrho_2\,dz & +\varrho_1\,dz & +r_3\,dz \\ \hline & & s_1\,dx & \sigma_3\,dx & \sigma_2\,dx \\ & M_3 & +\sigma_3\,dy & +s_2\,dy & +\sigma_1\,dy \\ & & +\sigma_2\,dz & +\sigma_1\,dz & +s_3\,dz \\ \hline \end{array} \qquad (25)$$

Dieses Symbol hat denselben Sinn wie das in § 29 beschriebene. Jedoch ist für den Aufpunkt selbst hier $dx = dy = dz = 0$ zu setzen, wodurch im Aufpunkt $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = 0$ wird. $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ gibt also die Größe der Tensoren in der Umgebung des Aufpunktes an; wenn dieselben im Aufpunkt selbst durch $\mathfrak{M}$ dargestellt sind, muß natürlich für die Umgebung $\overline{\mathfrak{M}} + \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ gebildet werden*).

Bei der Bildung der Komponenten M_1, M_2 und M_3 ist auch je ein absolutes Glied zu addieren und zu bedenken, daß eine abgebrochene Taylor'sche Reihe vorliegt, weshalb zu setzen ist z. B.:

$$M_1 = M_{01} + S_1\,dx + (\Sigma_3 - D_3)\,dy + (\Sigma_2 + D_2)\,dz + \frac{1}{2!}\,[p_1\,dx^2 + \pi_3\,dx\,dy + \pi_2\,dx\,dz + \pi_3\,dy\,dx + p_2\,dy^2 + \pi_1\,dy\,dz + \pi_2\,dz\,dx + \pi_1\,dz\,dy + p_3\,dz^2]$$
$$= M_{01} + S_1\,dx + (\Sigma_3 - D_3)\,dy + (\Sigma_2 + D_2)\,dz + \frac{1}{2}\,(p_1\,dx^2 + p_2\,dy^2 + p_3\,dz^2) + \pi_1\,dy\,dz + \pi_2\,dz\,dx + \pi_3\,dx\,dy \ldots \qquad (26)$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial x} &= S_1 + p_1\,dx + \pi_3\,dy + \pi_2\,dz \\ \frac{\partial M_1}{\partial y} &= (\Sigma_3 - D_3) + \pi_3\,dx + p_2\,dy + \pi_1\,dz \\ \frac{\partial M_1}{\partial z} &= (\Sigma_2 - D_2) + \pi_2\,dx + \pi_1\,dy + p_3\,dz, \end{aligned} \qquad (27)$$

was der Form $\overline{\mathfrak{M}} + \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ genau entspricht.

*) Vgl. auch W. Voigt: „Ueber die Parameter der Kristallphysik und über gerichtete Größen höherer Ordnung". Ann. d. Physik **5**, 241 (1901).

Besondere Eigenschaften der Tensoren zweiten Grades findet man, wenn man das Koordinatensystem in die in § 31 beschriebenen Hauptrichtungen legt. Es zeigt sich dann, daß die p_1, r_2 und s_3 von einer Zunahme der Dehnung, die π_1, ϱ_2 und σ_3 von einer Verschraubung der Hauptrichtungen und die übrigen Koeffizienten von einer einfachen Verdrehung der Hauptrichtungen bei einer Verschiebung des Aufpunktes in Richtung X, Y oder Z herrühren.

III. ABSCHNITT.

Relative Kräfte und Wege.

§ 38.

Prinzipien der Elastizitätstheorie.

Die in den vorhergegangenen beiden Abschnitten gefundenen Formeln treten miteinander in Beziehung, wenn z. B., wie es in der Elastizitätstheorie geschieht, die Kräfte den Dehnungen proportional gesetzt worden. Es gilt dann z. B. das Gesetz, daß, da Drehungen (worunter nicht relative, sondern Gesamtdrehungen des Flächen- oder Volumenelementes zu verstehen sind) keine relativen Kräfte erzeugen, Dehnungen aber immer drei zueinander senkrechte Hauptachsen haben, in einem elastischen Körper an jedem Punkte nicht mehr als drei Kraftlinien auftreten können, und außerdem, daß dieselben senkrecht zueinander stehen und mit den drei sie erzeugenden Dehnungslinien gleiche Richtungen haben.

Die eben genannten drei Kraftlinien wollen wir mit A, B, C, die Dehnungslinien mit E, F, G bezeichnen. Dann kommt, wie in der Elastizitätstheorie gefolgert wird:

$$\begin{aligned} A &= \lambda\Theta + 2\mu E \\ B &= \lambda\Theta + 2\mu F \\ C &= \lambda\Theta + 2\mu G, \end{aligned} \qquad (28 \text{ bis } 30)$$

worin jetzt die ABC mit den EFG gleiche und zueinander senkrechte Richtungen haben und wie früher $\Theta = E + F + G$ zu setzen ist. Die weiteren Formeln:

$$\lambda = \frac{k}{(1+k)\,(1-2k)\,.\,\alpha}, \quad \mu = \frac{1}{2\,(1+k)\,.\,\alpha}, \qquad (31 \text{ u. } 32)$$

worin α den Dehnungskoeffizienten und k den Faktor der Streuung der Dehnungslinien bezeichnet, entnehmen wir gleichfalls der Elastizitätstheorie.

§ 39.

Radialverschiebung in der Ebene.

Die Punkte konzentrischer Kreise mögen eine in die Ebene der Kreise fallende radiale Verschiebung von der Größe $M = L \cdot r^n$ erleiden. Die Dehnung in radialer Richtung beträgt dann, wenn sich diese Formel auf alle konzentrischen Kreise der Ebene bezieht:

$$E = \frac{dM}{dr} = n \cdot L \cdot r^{n-1},$$

und die Dehnung in tangentialer Richtung:

$$F = \frac{2M\pi}{2r\pi} = L \cdot r^{n-1}.$$

Die zugehörigen Kraftlinien betragen, nach 28 bis 30, wenn $G = 0$ gesetzt wird:

$$A = L \cdot r^{n-1} \cdot [\lambda(n+1) + 2\mu n]$$
$$B = L \cdot r^{n-1} \cdot [\lambda(n+1) + 2\mu].$$

Soll nun Gleichgewicht sein, so ist zu berücksichtigen, daß die B die Krümmung r haben und folglich eine entsprechende Anzahl endigende A beanspruchen (§ 12).

In jedem konzentrischen Kreis ist die Gesamtzahl der A gleich $2Lr^n\pi[\ldots]$; die in einem konzentrischen Ring von der Dicke dr von außen her endigende Zahl der A beträgt also $2nLr^{n-1}\pi[\ldots]dr$; auf der Längeneinheit des Umfanges endigen also von außen her $nLr^{n-2} \cdot [\lambda(n+1) + 2\mu n] \cdot dr$ Kraftlinien. Deren Zahl ist nach dem Vorherigen gleich $\frac{B}{r}dr$ zu setzen. Dabei sind die Vorzeichen, wie schon geschehen, positiv zu nehmen, da z. B. von außen her endigende Drucklinien nach dem Zentrum gerichtete Kräfte, kreisförmig verlaufende Drucklinien vom Zentrum weg gerichtete Kräfte ausüben, folglich beide einander das Gleichgewicht halten können. So folgt die Bedingungsgleichung:

$$n \cdot [\lambda(n+1) + 2\mu n] = \lambda(n+1) + 2\mu$$
$$n^2(\lambda + 2\mu) = \lambda + 2\mu$$
$$n = \pm 1$$

Hieraus folgt: Eine Radialverschiebung in der Ebene befindet sich dann im Gleichgewicht, wenn eine divergenzfreie Verschiebung $\mathfrak{M}_f$ ($n = -1$, $\frac{d}{dr}M \cdot 2r\pi = 0$, $E = -F$, $A = -B$) oder eine homogene Flächendehnung $\mathfrak{M}_r$ ($n = +1$, $E = F$, $A = B$) oder eine Kombination dieser beiden vorliegt.

§ 40.

Radialverschiebung im Raum.

Im Raum tritt im analogen Falle noch eine dritte Schar Dehnungslinien $G = F$ und eine dritte Schar Kraftlinien C auf.

Während für E und F dieselben Werte wie in § 39 gelten, folgt jetzt aus $G = F$ nach 28 bis 30: $A = L \cdot r^{n-1}[\lambda(n+2)+2\mu n]$, $B = C = L \cdot r^{n-1}[\lambda(n+2)+2\mu]$.

Die Gesamtzahl der radialgerichteten A ist in einer konzentrischen Kugeloberfläche $4 L r^{n+1}\pi . [\lambda(n+2)+2\mu n]$; in einer konzentrischen Kugelschale von der Dicke dr beträgt die von außen her endigende Zahl der A also $4(n+1)Lr^n\pi[\ldots]dr$. Auf der Flächeneinheit der Kugelschale endigen also von den A: $(n+1)Lr^{n-2}[\ldots]dr$ Kraftlinien. Im Gleichgewichtsfalle ist dies $\frac{B+C}{r}dr = \frac{2B}{r}dr$ zu setzen. Dies führt zur Bedingungsgleichung:

$$(n+1)[\lambda(n+2)+2\mu n] = 2[\lambda(n+2)+2\mu]$$
$$(n^2+n)(\lambda+2\mu) = 2(\lambda+2\mu)$$
$$n_1 = 1,\ n_2 = -2.$$

Hieraus folgt: Eine Radialverschiebung im Raum befindet sich dann im Gleichgewicht, wenn eine divergenzfreie Verschiebung $\mathfrak{M}_f$ $(n = -2, \frac{d}{dr}M . 4r^2\pi = 0, E = -2F = -2G, A = -2B = -2C)$ oder eine homogene Raumdehnung $(n = +1,\ A = B = C)$ oder eine Kombination dieser beiden vorliegt.

§ 41.

Beispiele.

Den Sinn der in § 39 und 40 gefundenen Sätze erkennt man sofort an Beispielen.

Gleichgewicht einer Hohlkugel mit Innenüberdruck.

Es sei eine Hohlkugel aus elastischem Material vom inneren Radius r_1 und äußeren Radius $r_2 = a . r_1$ gegeben. Ist in derselben der Druck p und außerhalb der Druck Null vorhanden, so müssen wir bedenken, daß dem Innendruck unmöglich durch die Kraftlinien, die bei einer bloßen Radialverschiebung $\mathfrak{M}_f$ in der Wandung der Hohlkugel entstehen, das Gleichgewicht gehalten werden kann. Denn die Radialverschiebung $\mathfrak{M}_f$ liefert eine Zugkraftmenge gleich Null in jedem Punkte und folglich auch insgesamt, die nicht imstande sein kann,

der Druckkraftmenge $3p \cdot \frac{4}{3} r_1^3 \pi$ des Innenraumes das Gleichgewicht zu halten (§ 11). Wir müssen also zunächst eine homogene Dehnung $\mathfrak{M}_r$ der Kugelwandung annehmen, durch die in der Kugelwandung ein homogener Zugraum von der räumlich gemessenen Dichte:

$$\frac{3p \cdot \frac{4}{3} r_1^3 \pi}{\frac{4}{3}(a^3-1) r_1^3 \pi} = \frac{3p}{a^3-1} \text{ entsteht.}$$

Dieser Zugraum erfüllt aber noch nicht alle Gleichgewichtsbedingungen. Insbesondere ist durch ihn die äußere Oberfläche der Hohlkugel aus dem Gleichgewicht gekommen. Gegenüber dem Außendruck Null ist in der Oberfläche ein Zug vorhanden.

Nehmen wir also noch eine vom Zentrum weg gerichtete Radialverschiebung $\mathfrak{M}_f$ an, die in der äußeren Kugeloberfläche radiale Drucklinien von der flächenhaft gemessenen Dichte $\frac{p}{a^3-1}$ erzeugen, so finden wir, daß die äußere Kugeloberfläche hierdurch gegenüber dem Zug des Zugraumes in der Kugelwandung ins Gleichgewicht kommt.

Nach § 40 nehmen nun die durch $\mathfrak{M}_f$ erzeugten Kraftlinien in ihrer Dichte mit der dritten Potenz des Radius ab. Wir erhalten also für einen Punkt der Kugelwandung als Dichte der radialen Kraftlinien:

$$A = \frac{p}{a^3-1}\left(-1+\frac{r_2^3}{r^3}\right).$$

worin r den Abstand des Punktes vom Kugelzentrum bedeutet. Es läßt sich dies noch umformen in:

$$A = p \cdot \frac{r_1^3 (r_2^3 - r^3)}{r^3 (r_2^3 - r_1^3)} \text{ *).}$$

Die radialen Drucklinien haben demnach an der inneren Oberfläche der Hohlkugel ($r = r_1$) die Dichte p.

Hieraus geht hervor, daß infolge der von uns angenommenen Radialverschiebungen $\mathfrak{M}_r \hat{+} \mathfrak{M}_f$ auch die Innenoberfläche gegenüber dem Innendruck p ins Gleichgewicht gekommen ist.

*) Im Falle ein Außendruck p_2 und ein Innendruck p_1 vorhanden ist, ist p_2 dem ganzen oben geschilderten System zu überlagern und es ist zu bilden: $p = p_1 - p_2$, $A = p_2 + (p_1 - p_2) \frac{r_1^3 (r_2^3 - r^3)}{r^3 (r_2^3 - r_1^3)}$. Vgl. auch Christiansen, Elemente der Theoretischen Physik, Seite 109.

$\mathfrak{M}_r$ bringt also eine Anstrengung des Materials der Hohlkugel hervor, die den Kraftmengen der auf sie ausgeübten Kräfte das Gleichgewicht hält. $\mathfrak{M}_f$ dagegen bringt die Oberflächen der Hohlkugel ins Gleichgewicht.

Gleichgewicht eines Stabes.

Wenn ein prismatischer Stab von der Länge l und dem Querschnitt q mit der Kraft P gespannt wird, so muß im Gleichgewichtsfalle im Stabe die Zugkraftmenge P.l entstehen. Dieselbe setzt eine homogene Dehnung $\mathfrak{M}_r$ voraus, welche einen homogenen Zugraum von der räumlich gemessenen Raumdichte $3A = \frac{P.l}{q.l} = \frac{P}{q}$ oder der flächenhaft gemessenen Raumdichte $A = \frac{P}{3q}$ erzeugt.

Da nun die Oberfläche des Stabes unbelastet ist, stört der genannte Zugraum das Gleichgewicht der Staboberfläche. Durch eine Längsdehnung mit dem Verschiebungsvektor $\mathfrak{M}_f$ muß sich der Stab der Länge nach noch doppelt so viel dehnen, als er sich in den beiden Querrichtungen zusammenzieht. Hierdurch bilden sich drei entsprechende Kraftlinienscharen, von denen die in der Stabachse verlaufende aus Zuglinien besteht und doppelt so dicht ist wie die beiden anderen dazu senkrecht verlaufenden, die aus Drucklinien bestehen.

Die letzteren müssen zur Herstellung des Gleichgewichts der Staboberfläche die Dichte $\frac{P}{3q}$ haben. Hieraus folgt, daß die erstere die Dichte $\frac{2P}{3q}$ hat. Wenn man dies zu der von dem genannten Zugraum ausgeübten Zugspannung $\frac{P}{3q}$ addiert, erhält man $\frac{P}{q}$, also folgerichtig die Spannung der Flächeneinheit des Stabquerschnittes selbst. Hieraus geht weiter hervor, daß durch die Kombination $\mathfrak{M}_r \hat{+} \mathfrak{M}_f$ auch die Stabenden, welche wir uns eben und zur Ausübung der Belastung an entsprechende ebene Flächen angelötet denken wollen, ins Gleichgewicht kommen.

Außerdem zeigt sich so, daß einem Drittel der Kraft P von dem durch $\mathfrak{M}_r$ erzeugten homogenen Zugraum, den beiden anderen Dritteln von P von den durch $\mathfrak{M}_f$ erzeugten Kraftlinien das Gleichgewicht gehalten wird, und dieser Satz unabhängig von der Größe von k richtig ist.

Gleichgewicht einer Röhre mit Innenüberdruck.

Die entsprechenden Betrachtungen lassen sich an einer Röhre durchführen. Wir denken sie uns sehr lang, und erhalten folgende Kraftliniendichten, wenn ihr innerer Radius r, ihr äußerer a . r beträgt

		von $\mathfrak{M}_r$ herrührend	von $\mathfrak{M}_f$ herrührend	Summa
an der äußeren Oberfläche gemessen:	radial	$\frac{+p}{a^2-1}$	$\frac{-p}{a^2-1}$	0
	tangential		$\frac{+p}{a^2-1}$	$\frac{+2p}{a^2-1}$
	achsial		0	$\frac{+p}{a^2-1}$
an der inneren Oberfläche gemessen:	radial		$\frac{-p\,a^2}{a^2-1}$	$-p$
	tangential		$\frac{+p\,a^2}{a^2-1}$	$\frac{+p(a^2+1)}{a^2-1}$
	achsial		0	$\frac{+p}{a^2-1}$

§ 42.

Spiegelungsprobleme.

Verschwindet das Volumen eines ein elastisches Medium verschiebenden Körpers gegenüber dem Volumen des Mediums, so verschwindet nach § 40 und 41 auch die Erscheinung homogener Spannungen im Medium, weil sich deren Raumdichte ergibt, wenn man die im Körper enthaltene Kraftmenge durch das Volumen des Mediums dividiert, und es bleibt nur noch eine divergenzfreie Verschiebung $\mathfrak{M}_f$ übrig, d. h. das elastische Medium erscheint inkompressibel.

Hieraus geht hervor, daß wir uns in der Elastizitätstheorie mit geometrischen Gebilden beschäftigen müssen, die mit den aus der Elektrizitätslehre bekannten geometrischen Gebilden übereinstimmen.

Ein kleiner Fremdkörper befinde sich in einem größeren Volumen eines elastischen Mediums, z. B. ein Eisenkörnchen in einem Kupferstück. Bei einer Temperaturänderung ändert sich nun das Volumen des Eisenkörnchens anders als das Volumen des Kupferstückes. Es muß dann ein divergenzfreier Verschiebungsfluß $\mathfrak{M}_f$ im Kupferstück entstehen.

Nehmen wir anders an, das Eisenkörnchen werde von außen durch einen Magneten beeinflußt, so wird es offenbar in dem Kupferstück relativ zu dessen Oberfläche eine Verschiebung erleiden. Die hierdurch wieder erzeugte Verschiebung der Kupferteilchen ist uns, weil sie divergenzfrei ist, aus der Lehre des Magnetismus selbst bekannt: sie läßt sich darstellen als eine Verschiebung, die von einem Magneten herrührt, der aus einer positiven Divergenz und aus einer um eine kleine Strecke l verschobenen negativen Divergenz besteht (Fig. 28).

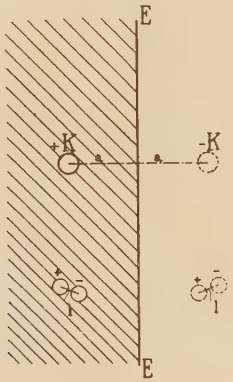

Fig. 28

Wenn sich aber das Eisenkörnchen in einem kleinen Abstand a von der Oberfläche des Kupferstückes befindet, so wird eine Störung des Oberflächengleichgewichts des Kupferstückes entstehen, falls das Eisenkörnchen eine Verschiebung erzeugt.

Jedoch st es auch wieder eine Verschiebung $\mathfrak{M}_f$, welche das Oberflächen-Gleichgewicht wieder herstellt. Nehmen wir an, die vom Eisenkörnchen ausgehenden $\mathfrak{M}_f$ würden an der Oberfläche des Kupferstückes gespiegelt, so können wir leicht einsehen, daß die Oberfläche hierdurch wieder ins Gleichgewicht kommt.

Hierbei entsteht nämlich dieselbe Wirkung, als wenn sich in einem von Kupfer erfüllten Raum zwei Eisenkörnchen im Abstand 2a voneinander befänden, die beide entgegengesetzt gleiche Wirkungen erzeugen.

Hierdurch werden alle diejenigen Spannungen im Kupfer gleich Null, die von der Ebene E, welche den Abstand 2a normal halbiert, senkrecht geschnitten werden. Dies läßt sich leicht mathematisch beweisen. Man findet dabei in der Ebene E selbst zueinander senk-

rechte, entgegengesetzt gleiche Kraftlinien verlaufend, die sich selbst (durch Krümmungen gegenüber Versickerungen § 12) das Gleichgewicht halten, während die zur Ebene senkrechten Kraftlinien Null sind.

Hieraus geht aber hervor, daß die Ebene E den mit Kupfer erfüllten Raum wirklich durchschneiden darf, ohne daß die zwei dabei entstehenden Kupferstücke eine Störung ihres Gleichgewichtes erleiden.

Befindet sich also eine reelle positive Divergenz $+K$ in einem elastischen Medium, so muß man zunächst eine außerhalb desselben befindliche, durch seine Oberfläche gespiegelte, virtuelle negative Divergenz $-K'$ mit in Rechnung ziehen, falls man den Vektor $\mathfrak{M}_f$ finden will, der die Oberfläche des Mediums ins Gleichgewicht bringt. Da aber die von der virtuellen Divergenz ausgehenden $\mathfrak{M}_f$ wieder auf den gegenüberliegenden Begrenzungsflächen des Mediums auftreffen, sind auch weiterhin dort erneute Spiegelungen anzunehmen, die nunmehr von einer virtuellen positiven Divergenz, eventuell aber auch von mehreren, ausgehen usw. So ist mit abwechselndem Vorzeichen der Divergenzen bis ins Unendliche fortzufahren, wo erst der Vektor $\mathfrak{M}_f$ verschwindet. Hieraus geht die Schwierigkeit der Aufgabe hervor, in einem praktischen Falle den Vektor $\mathfrak{M}_f$ zu finden. Bei einem auf Biegung beanspruchten Stabe z. B. ist fast jeder Punkt Ausgangspunkt eines divergenzfreien Verschiebungsflusses $\mathfrak{M}_f$, der sich an den zahlreichen Oberflächen des Stabes bis ins Unendliche, d. h. bis zur Verschwindung des Vektors $\mathfrak{M}_f$, spiegeln muß, wenn das Gleichgewicht der Staboberfläche gefunden werden soll.

An Ecken und Kanten eines Körpers entstehen natürlich im Falle seiner Belastung die intensivsten Spiegelungen von $\mathfrak{M}_f$, was die stärkste Uebereinanderlagerung der verschiedensten Spannungen erzeugt. Das Gefühl des Aesthetikers, der diesen Vorgang ahnt, und hier die Beseitigung aller Ecken und Kanten und deren Ersatz durch Abrundungen verlangt, ist ein durchaus sachliches, durch das Interesse der Widerstandsfähigkeit eines Körpers begründetes.

§ 43.

Allgemeine Gleichgewichtsformel.

Das zuvor entwickelte Spiegelungsprinzip genügt nur in dem speziellen Falle wirbelfreier Verschiebungen zur Auffindung derselben. Zur Untersuchung der wirbelhaltigen Verschiebungen bedürfen wir zunächst der allgemeinen Gleichgewichtsformel.

Wir denken uns ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem XYZ gegeben. Da bewiesen ist, daß an jedem Punkt des elastischen Körpers drei zueinander senkrechte Hauptdehnungen $E = \mathfrak{e}^2$, $F = \mathfrak{f}^2$, $G = \mathfrak{g}^2$ und drei zueinander senkrechte Hauptspannungen $A = \mathfrak{a}^2$, $B = \mathfrak{b}^2$, $C = \mathfrak{c}^2$ vorhanden sind, wobei die Richtungen der ABC mit den Richtungen der EFG zusammenfallen, wollen wir uns für jeden Punkt des elastischen Körpers die genannten Richtungen durch die Winkelkosinus folgender Tabelle gegeben denken:

	X	Y	Z
A, E	α_1	α_2	α_3
B, F	β_1	β_2	β_3
C, G	γ_1	γ_2	γ_3

Durch Multiplikation der Gleichungen 28 bis 30 mit α_1^2, bez. β_1^2, bez. γ_1^2 und Addition erhält man:

$$\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{c}_1^2 = \lambda \Theta + \mu (\mathfrak{e}_1^2 + \mathfrak{f}_1^2 + \mathfrak{g}_1^2), \tag{33}$$

worin der Faktor $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ des ersten Gliedes der rechten Seite fortgelassen ist. Zwei andere entsprechende Gleichungen erhält man bei Vertauschung des Index 1 mit 2 bez. 3.

Durch Multiplikation der Gleichungen 28 bis 30 mit $\alpha_1 \alpha_2$ bez. $\beta_1 \beta_2$ bez. $\gamma_1 \gamma_2$ und Addition erhält man:

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2 = 2 \mu (\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2), \tag{34}$$

worin rechts ein Glied mit dem Faktor $\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0$ fortgelassen ist. Zwei andere entsprechende Gleichungen findet man durch zyklische Vertauschung der Indices.

Nach § 21, Gleichung 1, lautet nun hier die Gleichgewichtsbedingung für die drei zueinander senkrechten Kraftlinienscharen $\mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 \mathfrak{c}^2$: (35)

$$\mathfrak{d}\mathfrak{v} \left[\mathfrak{a} \operatorname{div} \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \operatorname{div} \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \operatorname{div} \mathfrak{c} + (\mathfrak{a} \nabla) \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \nabla) \mathfrak{b} + (\mathfrak{c} \nabla) \mathfrak{c} \right] - \mathfrak{q} = 0.$$

Für die i-Komponente von $\mathfrak{q}$ kommt hierbei:

$$\mathfrak{d}\mathfrak{v} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{c}_1^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_3 + \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_3) \right] = \mathfrak{q}_1 = 0. \tag{36}$$

Nach 33 und 34 geht dies über in:

$$\mathfrak{d}\mathfrak{v} \left[\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{e}_1^2 + \mathfrak{f}_1^2 + \mathfrak{g}_1^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_3 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_3 + \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_3) \right] \right] = \mathfrak{q}_1 = 0. \tag{37}$$

Setzt man nun nach § 29 und Gleichung 22:

$$e_1^2 + f_1^2 + g_1^2 = \frac{\partial M_1}{\partial x},\quad e_1 e_2 + f_1 f_2 + g_1 g_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_1}{\partial y} + \frac{\partial M_2}{\partial x}\right)$$

$$e_1 e_3 + f_1 f_3 + g_1 g_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_1}{\partial z} + \frac{\partial M_3}{\partial x}\right),$$

so kommt die bekannte Formel:

$$d v\,[(\lambda+\mu)\,\nabla \operatorname{div} \mathfrak{M} \mathbin{\widehat{+}} \mu\,\nabla^2 \mathfrak{M}] = q = 0, \tag{38}$$

die zur Abkürzung der folgenden Rechnungen besonders abzuleiten war und deren i-Komponente ungekürzt wie folgt geschrieben sei:

$$d v\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial M_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial M_1}{\partial y} + \frac{\partial M_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\mu\left(\frac{\partial M_1}{\partial z} + \frac{\partial M_3}{\partial x}\right)\right] = q_1 = 0. \tag{39}$$

§ 44.

Zerlegung der allgemeinen Gleichgewichtsformel.

Zur Untersuchung der allgemeinen Gleichgewichtsformel 38 zerlegen wir die Kraftlinienscharen A B C in drei einander gleiche Kraftlinienscharen $A_f = B_f = C_f = \frac{1}{3}\,\Psi = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\,\Theta$, wobei $\Psi = A + B + C$ die räumlich gemessene Raumdichte ist; und drei restliche Kraftlinienscharen:

$$\begin{aligned} A_r &= \tfrac{2}{3}A - \tfrac{1}{3}B - \tfrac{1}{3}C = -\tfrac{2}{3}\mu\Theta + 2\mu E \\ B_r &= \tfrac{1}{3}A + \tfrac{2}{3}B - \tfrac{1}{3}C = -\tfrac{2}{3}\mu\Theta + 2\mu F \\ C_r &= \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}B + \tfrac{2}{3}C = -\tfrac{2}{3}\mu\Theta + 2\mu G. \end{aligned} \tag{40 bis 42}$$

Hieraus erhalten wir, wie in § 43, durch Multiplikation mit α_1^2, bez. β_1^2, bez. γ_1^2 und Addition $a_{r1}^2 + b_{r1}^2 + c_{r1}^2 = -\frac{2}{3}\mu\Theta + 2\mu(e_1^2 + f_1^2 + g_1^2)$

$$= -\tfrac{2}{3}\mu \operatorname{div}\mathfrak{M} + 2\mu\frac{\partial M_1}{\partial x},$$

sowie entsprechend zwei andere Gleichungen mit dem Index 2 bez. 3 statt 1.

Durch Multiplikation mit $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ und Addition kommt auch wieder:

$$a_{r1}\,a_{r2} + b_{r1}\,b_{r2} + c_{r1}\,c_{r2} = 2\mu(e_1 e_2 + f_1 f_2 + g_1 g_2) = \mu\left(\frac{\partial M_1}{\partial y} + \frac{\partial M_2}{\partial x}\right),$$

sowie entsprechend zwei andere Gleichungen bei zyklischer Vertauschung der Indices.

Dagegen kommen bei entsprechender Behandlung je drei andere Gleichungen von der Form:

$$a_{f1}^2 + b_{f1}^2 + c_{f1}^2 = \tfrac{1}{3}\,\Psi = (\lambda + \tfrac{2}{3}\mu)\,\Theta \text{ bez. } a_{f1}\,a_{f2} + b_{f1}\,b_{f2} + c_{f1}\,c_{f2} = 0.$$

Hiernach zerlegt sich die Formel 38 in folgende zwei Komponenten, wenn man je auf die Gleichgewichtsbedingung 35 zurückgreift:

$$\mathrm{d\,v}\left[\tfrac{1}{3}\mu\,\nabla\,\mathrm{div}\,\mathfrak{M}\,\hat{+}\,\mu\,\nabla^2\mathfrak{M}\right]=\mathfrak{q}_f \tag{43}$$

$$\text{und}\quad \mathrm{d\,v}\left[\left(\lambda+\tfrac{2}{3}\mu\right)\nabla\,\mathrm{div}\,\mathfrak{M}\right]=\mathrm{d\,v}\left[\tfrac{1}{3}\,\nabla\,\Psi\right]=\mathfrak{q}_r \tag{44}$$

mit der Bedingung $\mathfrak{q}_f \,\hat{+}\, \mathfrak{q}_r = 0$.

Die $\mathfrak{i}$-Komponente von $\mathfrak{q}_f$ lautet dabei:

$$\mathrm{d\,v}\left\{2\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\tfrac{1}{3}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{M}+\frac{\partial M_1}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M_1}{\partial y}+\frac{\partial M_2}{\partial x}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial M_1}{\partial z}+\frac{\partial M_3}{\partial x}\right)\right\}=\mathfrak{q}_{f1}.$$

Ein Vergleich mit 23 läßt aber nun erkennen, daß hierin in den runden Klammern die Tensoren von $\mathfrak{M}_f$ stehen. Man kann also schreiben $\mathrm{d\,v}\left[2\mu\,\nabla^2\mathfrak{M}_f\right]=\mathfrak{q}_f$.

Nach § 36 ist aber $\mathfrak{M}_f$ divergenz- und wirbelfrei; hieraus folgt, daß auch $\nabla^2\mathfrak{M}_f=\nabla\,\mathrm{div}\,\mathfrak{M}_f \mathrel{\hat{=}} \mathrm{curl}^2\mathfrak{M}_f=0$ und damit auch identisch

$$\mathfrak{q}_f=0 \text{ ist.} \tag{45}$$

Der Vektor $\mathfrak{M}_f$ hat also auf das Innere des elastischen Körpers gar keinen Einfluß; er bringt, wie wir schon wissen, nur seine Oberfläche ins Gleichgewicht.

Hiermit schrumpft unsere Gleichung 38 zusammen zu der Bedingungsgleichung:

$$\mathrm{d\,v}\left[\left(\lambda+\tfrac{2}{3}\mu\right)\nabla\,\mathrm{div}\,\mathfrak{M}\right]=\mathrm{d\,v}\left[\tfrac{1}{3}\,\nabla\,\Psi\right]=\mathfrak{q}_r=0, \tag{46}$$

worin für $\mathfrak{M}$ auch $\mathfrak{M}_r$ geschrieben werden könnte, da $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_f \,\hat{+}\, \mathfrak{M}_r$, div $\mathfrak{M}_f$ aber gleich Null ist.

So folgt, daß die von uns vorgenommene Spaltung der Kraftlinien auch eine Spaltung von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}_f$ und $\mathfrak{M}_r$ nach sich gezogen hat.

Schließt man hieraus weiter, daß auch der Koeffizient $\lambda+\frac{2}{3}\mu$ dem Koeffizienten 2μ gleich sein müsse, damit die Kontinuitätsbedingung erfüllt sei, so kommt:

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{4}{3}, \text{ und weiter nach 31 und 32: } k=\frac{2}{7}=\frac{1}{3\frac{1}{2}},\quad \lambda=\frac{14}{27\alpha},\quad \mu=\frac{7}{18\alpha}. \tag{47}$$

Wenn praktisch k etwas größer gefunden wird, so ist dies vielleicht wie in § 8 durch die Entstehung einer Struktur im Falle einer Belastung zu erklären.

§ 45.
Diskussion des gefundenen Resultates.

Wenn man in Gleichung 46 $\nabla \Psi$ als Produkt $\nabla . \Psi$ auffaßt, so bedeutet sie nach dem Satze, daß ein Produkt Null wird, wenn einer seiner Faktoren Null wird:

Daß im Gleichgewichtsfall entweder überall ein homogener Kraftraum bez. Dehnungsraum ($\nabla = 0$) oder keine Kraftmenge (bez. Dehnung) vorhanden ist ($\Psi = 0$).

Wir finden also unsere früheren Ergebnisse (§ 39 bis 42) noch einmal wieder, ohne jedoch den gesuchten wirbelhaltigen Verschiebungen näher zu kommen.

Dieser Nachteil entspringt daraus, daß wir den in den Gleichungen 38 und 39 vorkommenden Tensordifferentiationen noch nicht näher getreten sind.

Indessen können wir bereits den Sinn der Gleichungen 47 auf anderem Wege deuten.

Wir wählen eine einfache Fiktion, die uns aller Raumintregrationen, die wir zur Durchführung des Spiegelungsprinzips nötig haben, enthebt.

Denken wir uns zunächst einen Stab von der Länge 1 und unendlich großem Querschnitt, so ist im Falle seiner Belastung, z. B. durch Druck, vorerst ein homogener Druckraum anzunehmen, der durch eine homogene negative Dehnung entsteht. Die letztere möge Θ in der Volumeneinheit betragen. Wir erhalten dadurch eine Verkürzung des Stabes von der Größe $\frac{1}{3}\Theta$ nach allen Richtungen.

Zur Erfüllung der Kontinuitätsbedingung muß nun nach jedem zusammengedrückten Volumenelement dv ein divergenz- und wirbelfreier Verschiebungsfluß $\mathfrak{M}'_f$ zustrahlen, der die Zusammendrückung ursächlich erzeugt und durch den das Gesamtvolumen $\Theta . dv$ in dv eintritt.

Kämen diese $\mathfrak{M}'_f$ von allen Seiten gleichmäßig, so würden sie sich gegenseitig aufheben.

Infolge unserer Annahme können die $\mathfrak{M}'_f$ indessen nur von den Stabenden herkommen, weil nur dort der Stab belastet ist.

Diese Betrachtung ist auf jedes Volumenelement dv zu erstrecken, und ergibt so schließlich eine Zusammendrückung des Stabes in der Längsrichtung von der Größe Θ und zwei Ausdehnungen des Stabes von der Größe $\frac{1}{3}\Theta$ in den zwei dazu senkrechten Richtungen.

Denken wir uns nun aus dem Stab mit unendlich großem Querschnitt einen zylindrischen Stab mit sehr kleinem Querschnitt herausgeschnitten, so ist in dem letzteren noch eine Verschiebung $\mathfrak{M}''_f$ an-

zunehmen, damit seine durch das Herausschneiden gänzlich entlastete Oberfläche wieder ins Gleichgewicht kommt.

Nach dem Spiegelungsprinzip haben wir uns in den dv' außerhalb des Stabes konzentrisch angeordnete virtuelle Divergenzen zu denken, die durch Oberflächenspiegelung der im Innern des Stabes befindlichen reellen Divergenzen entstehen.

Da die letzteren den Stab auszudehnen suchen, müssen nach dem Spiegelungsprinzip die ersteren eine Zusammenziehung herbeiführen.

Bei Durchrechnung dieser Aufgabe findet man aber, daß sich die von konzentrisch angeordneten Divergenzen ausgehenden, nach dem Zentrum gerichteten Komponenten der $\mathfrak{M}''_f$ sämtlich fortheben (vgl. die ähnliche Aufgabe der Potentialtheorie über das Potentialgefälle im Innern einer elektrisch geladenen Kugel).

Folglich bleiben nur noch die dazu senkrechten Komponenten übrig, deren Richtung mit der Stabachsenrichtung zusammenfällt.

Hieraus folgt, daß auch die Volumina $\Theta . dv'$ ausschließlich mit Hilfe der letzteren Komponenten von $\mathfrak{M}''_f$ in die dv' eintreten.

Wir erhalten also noch eine zweite Zusammenziehung des Stabes in Längsrichtung von der Größe Θ und zwei dazu senkrechten Ausdehnungen von der Größe $\frac{1}{2}\Theta$ senkrecht dazu.

So finden wir im Ganzen:

	1 Längsdehnung	2 Querdehnungen
von $\mathfrak{M}_r$ herrührend:	$-\frac{1}{3}\Theta$	$-\frac{1}{3}\Theta$
von $\mathfrak{M}'_f$ herrührend:	$-1.\Theta$	$+\frac{1}{2}\Theta$
von $\mathfrak{M}''_f$ herrührend:	$-1.\Theta$	$+\frac{1}{2}\Theta$
in Summa:	$-\frac{7}{3}\Theta$	$+\frac{3}{3}\Theta$

was wieder $k = \frac{2}{7}$ ergibt.

Diese Anschauung bestätigt sich weiter, wenn man die Energieverteilung im Stab berechnet. Aus den Voraussetzungen der Elastizitätstheorie findet man unter der genannten Bedingung gleicher und zueinander senkrechter Richtungen für E, F, G und A, B, C als Energie T in der Volumeneinheit allgemein:

$$T = \tfrac{1}{2}\alpha[A^2 + B^2 + C^2 - 2k(BC + CA + AB)]. \qquad (48)$$

Mit Hilfe 28 bis 32 läßt sich dies auch umformen in:

$$T = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{(1+k)(1-2k)} \cdot [(1-k)(E^2 + F^2 + G^2) + 2k(FG + GE + EF)]. \qquad (49)$$

Hieraus kommt für eine homogene Dehnung $E = F = G = \frac{1}{3}\Theta$:

$$T_r = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{1-2k} \cdot \tfrac{1}{3}\Theta^2 = \mu\Theta^2,$$

und für eine wirbel- und divergenzfreie Verschiebung $E = +2\Theta$, $F = G = -\Theta$:

$$T_f = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{1+k} \cdot 6\,\Theta^2 = 6\,\mu\,\Theta^2.$$

Setzt man $\Theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\,\Psi = \frac{3\alpha}{7}\,\Psi$ ein, so wird:

$$T_r = \tfrac{1}{14}\alpha\,\Psi^2,\quad T_f = \frac{3\alpha}{7}\,\Psi^2,\quad T = T_r + T_f = \tfrac{1}{2}\alpha\,\Psi^2,$$

welches Resultat von vornherein nach Gleichung 48 niedergeschrieben werden konnte, da für einen Stab $A = \Psi$, $B = C = 0$ gilt.

§ 46.

Zerlegung des Tensors zweiten Grades.

Um den Tensordifferentiationen näher zu treten, bilden wir zunächst aus 25 analog 9 und 22:

$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_s =$

	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$
M_{s1}	$p_1\,dx + \frac{1}{2}(\pi_3 + r_1)\,dy + \frac{1}{2}(\pi_2 + s_1)\,dz$	$\frac{1}{2}(\pi_3 + r_1)\,dx + \frac{1}{2}(p_2 + \varrho_3)\,dy + \frac{1}{3}(\pi_1 + \varrho_2 + \sigma_3)\,dz$	$\frac{1}{2}(\pi_2 + s_1)\,dx + \frac{1}{3}(\pi_1 + \varrho_2 + \sigma_3)\,dy + \frac{1}{2}(p_3 + \sigma_2)\,dz$
M_{s2}	$\frac{1}{2}(r_1 + \pi_3)\,dx + \frac{1}{2}(\varrho_3 + p_2)\,dy + \frac{1}{3}(\pi_1 + \varrho_2 + \sigma_3)\,dz$	$\frac{1}{2}(\varrho_3 + p_2)\,dx + r_2\,dy + \frac{1}{2}(\varrho_1 + s_2)\,dz$	$\frac{1}{3}(\pi_1 + \varrho_2 + \sigma_3)\,dx + \frac{1}{2}(\varrho_1 + s_2)\,dy + \frac{1}{2}(r_3 + \sigma_1)\,dz$
M_{s3}	$\frac{1}{2}(s_1 + \pi_2)\,dx + \frac{1}{3}(\pi_1 + \varrho_2 + \sigma_3)\,dy + \frac{1}{2}(\sigma_2 + p_3)\,dz$	$\frac{1}{3}(\pi_1 + \varrho_2 + \sigma_3)\,dx + \frac{1}{2}(s_2 + \varrho_1)\,dy + \frac{1}{2}(\sigma_1 + r_3)\,dz$	$\frac{1}{2}(\sigma_2 + p_3)\,dx + \frac{1}{2}(\sigma_1 + r_3)\,dy + s_3\,dz$

(50)

Hierzu sei bemerkt, daß z. B. bei $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial M_{s1}}{\partial x} = \pi_{s3}$ eine Summe auftritt, weil diese selbe Summe bei $\frac{\partial}{dx}\frac{dM_{s1}}{dy} = \pi_{s3}$ erscheint. Desgleichen tritt die von den übrigen abweichende Formel $\pi_{s1} = \varrho_{s2} - \sigma_{s3} = \frac{1}{3}(\pi_1 + \varrho_2 + \sigma_3)$ auf, weil die Bedingung, daß die Reihenfolge der Differentiationen beliebig, das Tensorbild aber symmetrisch sein soll, nicht anders erfüllt werden kann.

Aus $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_s$ erhält man unter der Bedingung, daß $\mathfrak{M}_s + \mathfrak{M}_d = \overline{\mathfrak{M}}$ sein soll, ein Feld, in welchem statt der in 50 zwischen allen zwei-

gliedrigen Komponenten angegebenen Pluszeichen Minuszeichen auftreten, und welches auch geschrieben werden kann*):

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_d = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_{d1} & \begin{matrix} 0\,.\,dx \\ -\delta_{31}\,dy \\ +\delta_{21}\,dz \end{matrix} & \begin{matrix} -\delta_{31}\,dx \\ -\delta_{32}\,dy \\ +\frac{2}{3}(\delta_{22}-\delta_{33})\,dz \end{matrix} & \begin{matrix} +\delta_{21}\,dx \\ +\frac{2}{3}(\delta_{22}-\delta_{33})\,dy \\ +\delta_{23}\,dz \end{matrix} \\ \hline M_{d2} & \begin{matrix} +\delta_{31}\,dx \\ +\delta_{32}\,dy \\ +\frac{2}{3}(\delta_{33}-\delta_{11})\,dz \end{matrix} & \begin{matrix} +\delta_{32}\,dx \\ +0\,.\,dy \\ -\delta_{12}\,dz \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{2}{3}(\delta_{33}-\delta_{11})\,dx \\ -\delta_{12}\,dy \\ -\delta_{13}\,dz \end{matrix} \\ \hline M_{d3} & \begin{matrix} -\delta_{21}\,dx \\ +\frac{2}{3}(\delta_{11}-\delta_{22})\,dy \\ -\delta_{23}\,dz \end{matrix} & \begin{matrix} +\frac{2}{3}(\delta_{11}-\delta_{22})\,dx \\ +\delta_{12}\,dy \\ +\delta_{13}\,dz \end{matrix} & \begin{matrix} -\delta_{23}\,dx \\ +\delta_{13}\,dy \\ +0\,.\,dz \end{matrix} \\ \hline \end{array} \tag{51}$$

Hierin sind die einzelnen Größen aus den unmittelbar aufzustellenden Beziehungen ersichtlich:

$$\overline{D} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline D_1 & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ D_2 & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ D_3 & \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline D_1 & \frac{1}{2}(\sigma_3-\varrho_2) & \frac{1}{2}(s_2-\varrho_1) & \frac{1}{2}(\sigma_1-r_3) \\ D_2 & \frac{1}{2}(\pi_2-s_1) & \frac{1}{2}(\pi_1-\sigma_3) & \frac{1}{2}(p_3-\sigma_2) \\ D_3 & \frac{1}{2}(r_1-\pi_3) & \frac{1}{2}(\varrho_3-p_2) & \frac{1}{2}(\varrho_2-\pi_1) \\ \hline \end{array} \tag{52}$$

Wenn man aus $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_s$ den divergenz- und wirbelfreien Vektor $\overline{\mathfrak{M}}_f$ bilden will, ist von den bezüglichen Komponenten ein Sechstel der Komponenten eines Vektors $\mathfrak{U} = \nabla^2 \mathfrak{M} \mathbin{\hat{+}} \nabla \operatorname{div} \mathfrak{M}$, also:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{6} U_1 &= \tfrac{1}{6}(2p_1 + p_2 + p_3 + \varrho_3 + \sigma_2) \\ \text{bez. } \tfrac{1}{6} U_2 &= \tfrac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + r_3 + \sigma_1 + \pi_3) \\ \text{bez. } \tfrac{1}{6} U_3 &= \tfrac{1}{6}(s_1 + s_2 + 2s_3 + \pi_2 + \varrho_1) \end{aligned} \tag{53}$$

abzuziehen.

*) In dem genannten Werke von Föppel auf Seite 53 findet man die Vektoren $\mathfrak{M}_s$ und $\mathfrak{M}_d$ mit C und B bezeichnet. Die dort geschilderten Eigenschaften dieser Vektoren kann man aus obigen Tabellen ohne weiteres ablesen, außer der, daß $\mathfrak{M}_d$ gar keine Deformation enthalten soll. Dies trifft hinsichtlich der Komponenten von der Form $\frac{2}{3}(\delta_{22} - \delta_{33})\,dz\,(= \pi_{d1}\,.\,dz)$ nicht zu, und es läßt sich leicht beweisen, daß sich hinsichtlich dieser Komponenten die geforderte Zerlegung nicht durchführen läßt. M_d enthält also hier doch Deformation, oder die Zerlegung kann nicht der Bedingung genügen, daß, wie bei jedem Vektor, $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial M_{d1}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial M_{d1}}{\partial z}$ usw. sein soll.

Man erhält:

$$\overline{\mathfrak{M}}_f = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\
\hline
M_{f1} & \begin{array}{c} \frac{1}{6}(4p_1 - p_2 - p_3 - \varrho_3 - \sigma_2)\,dx \\ +\frac{1}{6}(2r_1 - 2r_2 - r_3 - \sigma_1 + 2\pi_3)\,dy \\ +\frac{1}{6}(2s_1 - s_2 - 2s_3 + 2\pi_2 - \varrho_1)\,dz \end{array} & \begin{array}{c} \frac{1}{6}(2r_1 - 2r_2 - r_3 - \sigma_1 + 2\pi_3)\,dx \\ +\frac{1}{6}(-2p_1 + 2p_2 - p_3 - 2\varrho_3 - \sigma_2)\,dy \\ +\frac{1}{3}(\pi_1 + \varrho_2 + \sigma_3)\,dz \end{array} & \begin{array}{c} \frac{1}{6}(2s_1 - s_2 - 2s_3 + 2\pi_2 - \varrho_1)\,dx \\ +\frac{1}{3}(\pi_1 + \varrho_2 + \sigma_3)\,dy \\ +\frac{1}{6}(-2p_1 - p_2 + 2p_3 - \varrho_3 - 2\sigma_2)\,dz \end{array} \\
\hline
M_{f2} & \begin{array}{c} \frac{1}{6}(2r_1 - 2r_2 - r_3 - \sigma_1 + 2\pi_3)\,dx \\ +\frac{1}{6}(-2p_1 + 2p_2 - p_3 + 2\varrho_3 - \sigma_2)\,dy \\ +\frac{1}{3}(\pi_1 + \varrho_2 + \sigma_3)\,dz \end{array} & \begin{array}{c} \frac{1}{6}(-2p_1 + 2p_2 - p_3 + 2\varrho_3 - \sigma_2)\,dx \\ +\frac{1}{6}(-r_1 + 4r_2 - r_3 - \sigma_1 - \pi_3)\,dy \\ +\frac{1}{6}(-s_1 + 2s_2 - 2s_3 - \pi_2 + 2\varrho_1)\,dz \end{array} & \begin{array}{c} \frac{1}{3}(\pi_1 + \varrho_2 + \sigma_3)\,dx \\ +\frac{1}{6}(-s_1 + 2s_2 - 2s_3 - \pi_2 + 2\varrho_1)\,dy \\ +\frac{1}{6}(-r_1 - 2r_2 + 2r_3 + 2\sigma_1 - \pi_3)\,dz \end{array} \\
\hline
M_{f3} & \begin{array}{c} \frac{1}{6}(2s_1 - s_2 - 2s_3 + 2\pi_2 - \varrho_1)\,dx \\ +\frac{1}{3}(\pi_1 + \varrho_2 + \sigma_3)\,dy \\ +\frac{1}{6}(-2p_1 - p_2 + 2p_3 - \varrho_3 + 2\sigma_2)\,dz \end{array} & \begin{array}{c} \frac{1}{3}(\pi_1 + \varrho_2 + \sigma_3)\,dx \\ +\frac{1}{6}(-s_1 + 2s_2 - 2s_3 - \pi_2 + 2\varrho_1)\,dy \\ +\frac{1}{6}(-r_1 - 2r_2 + 2r_3 + 2\sigma_1 - \pi_3)\,dz \end{array} & \begin{array}{c} \frac{1}{6}(-2p_1 - p_2 + 2p_3 - \varrho_3 + 2\sigma_2)\,dx \\ +\frac{1}{6}(-r_1 - 2r_2 + 2r_3 + 2\sigma_1 - \pi_3)\,dy \\ +\frac{1}{6}(-s_1 - s_2 + 4s_3 - \pi_2 - \varrho_1)\,dz \end{array} \\
\hline
\end{array} \qquad (54)$$

Hieraus geht jetzt deutlich hervor, daß:

$$\nabla^2 \mathfrak{M}_f = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{M}_f = \operatorname{curl}^2 \mathfrak{M}_f = 0 \text{ ist.}$$

Einen Vektor $\mathfrak{M}_c$ von dieser selben Eigenschaft kann man aber auch aus $\mathfrak{M}_d$ ableiten. Zu diesem Zwecke braucht man nur $\frac{1}{2}(\delta_{32} - \delta_{23})$ usw. von den entsprechenden Komponenten abzuziehen bez. dazu zu addieren. Man erhält:

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_c = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_{c1} & \begin{array}{c} 0 \,.\, dx \\ -\frac{1}{2}(\delta_{13}+\delta_{31})\,dy \\ +\frac{1}{2}(\delta_{21}+\delta_{12})\,dz \end{array} & \begin{array}{c} -\frac{1}{2}(\delta_{13}+\delta_{31})\,dx \\ -\frac{2}{3}(\delta_{32}+\delta_{23})\,dy \\ +\frac{2}{3}(\delta_{22}-\delta_{33})\,dz \end{array} & \begin{array}{c} +\frac{1}{2}(\delta_{21}+\delta_{12})\,dx \\ +\frac{2}{3}(\delta_{22}-\delta_{33})\,dy \\ +\frac{1}{2}(\delta_{32}+\delta_{23})\,dz \end{array} \\ \hline M_{c2} & \begin{array}{c} +\frac{1}{2}(\delta_{13}+\delta_{31})\,dx \\ +\frac{1}{2}(\delta_{32}+\delta_{23})\,dy \\ +\frac{2}{3}(\delta_{33}-\delta_{11})\,dz \end{array} & \begin{array}{c} +\frac{1}{2}(\delta_{32}+\delta_{23})\,dx \\ +0\,.\,dy \\ \frac{1}{2}(\delta_{21}+\delta_{12})\,dz \end{array} & \begin{array}{c} \frac{2}{3}(\delta_{33}-\delta_{11})\,dx \\ -\frac{1}{2}(\delta_{21}+\delta_{12})\,dy \\ -\frac{1}{2}(\delta_{13}+\delta_{31})\,dz \end{array} \\ \hline M_{c3} & \begin{array}{c} -\frac{1}{2}(\delta_{21}+\delta_{12})\,dx \\ +\frac{2}{3}(\delta_{11}\quad\delta_{22})\,dy \\ -\frac{1}{2}(\delta_{32}+\delta_{23})\,dz \end{array} & \begin{array}{c} \frac{2}{3}(\delta_{11}-\delta_{22})\,dx \\ +\frac{1}{2}(\delta_{21}+\delta_{12})\,dy \\ +\frac{1}{2}(\delta_{13}+\delta_{31})\,dz \end{array} & \begin{array}{c} -\frac{1}{2}(\delta_{32}+\delta_{23})\,dx \\ +\frac{1}{2}(\delta_{13}+\delta_{31})\,dy \\ +0\,.\,dz \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (55)$$

Auch hier ist $\nabla^2 \mathfrak{M}_c = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{M}_c = \operatorname{curl}^2 \mathfrak{M}_c = 0$, jedoch unterscheidet sich $\mathfrak{M}_c$ von $\mathfrak{M}_f$ dadurch, daß $\mathfrak{M}_c$ einen einfachen Wirbel hat. Für diesen findet man aus 55 sofort:

$$\mathfrak{D}_c = \tfrac{1}{2} \operatorname{curl} \overline{\overline{\mathfrak{M}}}_c = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \hline D_{c1} & \delta_{11} & \frac{1}{2}(\delta_{21}+\delta_{12}) & \frac{1}{2}(\delta_{32}+\delta_{32}) \\ \hline D_{c2} & \frac{1}{2}(\delta_{21}+\delta_{12}) & \delta_{22} & \frac{1}{2}(\delta_{13}+\delta_{31}) \\ \hline D_{c3} & \frac{1}{2}(\delta_{32}+\delta_{23}) & \frac{1}{2}(\delta_{13}+\delta_{31}) & \delta_{32} \\ \hline \end{array} \quad (56)$$

Der Vektor $\mathfrak{D}_c$ ist offenbar wirbelfrei, da er einen symmetrischen Tensor hat; außerdem ist er aber auch divergenzfrei ($\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=0$, vgl. 52).

Bestimmt man nun den Restvektor $\mathfrak{M}_r$ so, daß

$$\mathfrak{M}_f \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{M}_c \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{M}_r = \mathfrak{M} \text{ wird, so kommt:}$$

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_r = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_{r1} & \begin{array}{c}\frac{1}{6}U_1\,dx \\ +(\frac{1}{6}U_2+\frac{1}{4}W_2)\,dy \\ +(\frac{1}{6}U_3+\frac{1}{4}W_3)\,dz\end{array} & \begin{array}{c}(\frac{1}{6}U_2+\frac{1}{4}W_2)\,dx \\ +(\frac{1}{6}U_1-\frac{1}{4}W_1)\,dy \\ +0\,.\,dz\end{array} & \begin{array}{c}(\frac{1}{6}U_3+\frac{1}{4}W_3)\,dx \\ +0\,.\,dy \\ +(\frac{1}{6}U_1-\frac{1}{4}W_1)\,dz\end{array} \\ \hline M_{r2} & \begin{array}{c}(\frac{1}{6}U_2-\frac{1}{4}W_2)\,dx \\ +(\frac{1}{6}U_1+\frac{1}{4}W_1\,dy \\ +0\,.\,dz\end{array} & \begin{array}{c}(\frac{1}{6}U_1+\frac{1}{4}W_1)\,dx \\ +\frac{1}{6}U_2\,dy \\ +(\frac{1}{6}U_3+\frac{1}{4}W_3)\,dz\end{array} & \begin{array}{c}+0\,.\,dx \\ +(\frac{1}{6}U_3+\frac{1}{4}W_3)\,dy \\ +(\frac{1}{6}U_2-\frac{1}{4}W_2)\,dz\end{array} \\ \hline M_{r3} & \begin{array}{c}(\frac{1}{6}U_3-\frac{1}{4}W_3)\,dx \\ +0\,.\,dy \\ +(\frac{1}{6}U_1+\frac{1}{4}W_1)\,dz\end{array} & \begin{array}{c}+0\,.\,dx \\ +(\frac{1}{6}U_3-\frac{1}{4}W_3)\,dy \\ +(\frac{1}{6}U_2+\frac{1}{4}W_2)\,dz\end{array} & \begin{array}{c}+(\frac{1}{6}U_1+\frac{1}{4}W_1)\,dx \\ +(\frac{1}{6}U_2+\frac{1}{4}W_2)\,dy \\ +\frac{1}{6}U_3\,dz\end{array} \\ \hline \end{array} \tag{57}$$

wobei die Größen W aus der Gleichung:

$$\mathfrak{W} = \operatorname{curl}^2\mathfrak{M} = \mathfrak{i}\,.\,W_1 \hat{+} \mathfrak{j}\,W_2 \hat{+} \mathfrak{k}\,.\,W_3 = \mathfrak{i}\,(-p_2 - p_3 + \varrho_3 + \sigma_2)$$
$$\hat{+}\,\mathfrak{j}\,(-r_3 - r_1 + \sigma_1 + \pi_3) \hat{+} \mathfrak{k}\,(-s_1 - s_2 + \pi_2 + \varrho_1) \tag{58}$$

hervorgehen.

Faßt man 50 und 51 als Operationen auf, so kann man aus 57 leicht $\mathfrak{M}_{rs}$ und $\mathfrak{M}_{rd}$ bilden, und man findet dabei, daß $\mathfrak{M}_{rs}$ nur die Komponenten von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{M}_{rd}$ nur die Komponenten von $\mathfrak{W}$ enthält. Weiter findet man $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_{rs} + \mathfrak{M}_{rd}$, und somit schließlich:

$$\mathfrak{M}_f \hat{+} \mathfrak{M}_c \hat{+} \mathfrak{M}_{rs} \hat{+} \mathfrak{M}_{rd} = \mathfrak{M}.$$

Daß damit unsere Zerlegung beendet ist, zeigt sich darin, daß bei Bildung der vier Operationen $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_f$, $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_c$, $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_{rs}$ und $\overline{\mathfrak{M}}_{rd}$ voneinander Glied für Glied gleich Null wird (z. B. $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_{fg} = 0$), während bei wiederholter Bildung derselben Operationen dieselbe Formel zurückkommt (z. B. $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_{cc} = \overline{\overline{\mathfrak{M}}}_c$). Hieraus geht hervor, daß jeder dieser vier Vektoren seine besonderen Eigenschaften hat, die er mit keinem andern teilt.

$\mathfrak{M}_{rs}$ ist wieder wirbelfrei, $\mathfrak{M}_{rd}$ hat den Wirbel:

$$\bar{\mathfrak{D}}_{rd} = \tfrac{1}{2}\operatorname{curl}\mathfrak{M}_{rd} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline D_{rd1} & 0 & -\frac{1}{4}W_3 & +\frac{1}{4}W_2 \\ D_{rd2} & +\frac{1}{4}W_3 & 0 & -\frac{1}{4}W_1 \\ D_{rd3} & -\frac{1}{4}W_2 & +\frac{1}{4}W_1 & 0 \\ \hline \end{array} \tag{59}$$

dieser geht also aus einer einfachen Drehung hervor (vgl. 20), und es folgt $\mathfrak{D}_c \hat{+} \mathfrak{D}_{rd} = \mathfrak{D}$.

§ 47.

Diskussion der gefundenen Ergebnisse.

Wie schon früher erörtert, fällt der wirbel- und divergenzfreie Vektor $\mathfrak{M}_f$ aus der Gleichgewichtsbedingung 38 von vornherein aus, welche Beschaffenheit er auch haben mag. Gleichwohl ist er eindeutig bestimmt, wenn der elastische Körper eine Oberfläche hat, d. h. endlich ist.

Durch die Untersuchung des vorigen Paragraphen haben wir aber noch einen zweiten Vektor $\mathfrak{M}_c$ gefunden, der dieselben Eigenschaften wie $\mathfrak{M}_f$ besitzt, jedoch Wirbel enthält. Die Wirbel desselben sind so beschaffen, daß ihre Drehungsvektoren $\mathfrak{D}_c$ divergenz- und wirbelfrei verteilt sind.

Auch der Vektor $\mathfrak{M}_c$ bringt, ohne das Innere zu beeinflussen, die Oberfläche eines elastischen Körpers ins Gleichgewicht, für den Fall nämlich, daß an derselben von innen her Drehmomente angreifen, denen von außen durch keine Gegendrehmomente das Gleichgewicht gehalten wird.

Hieraus geht aber hervor, daß wir auch $\mathfrak{M}_c$ nur durch das Spiegelungsprinzip finden können. An Stelle der virtuellen Divergenzen, die bei $\mathfrak{M}_f$ in Frage kommen, haben wir hier virtuelle Vektoren $\mathfrak{D}$ anzunehmen, aus denen die $\mathfrak{M}_c$ abgeleitet werden können.

Vermutlich findet sich hierin die Erklärung dafür, daß der in § 35 gefundene Vektor:

$$\mathfrak{D}_c = \mathfrak{i} \cdot \tfrac{1}{2} a \cdot x \hat{+} \mathfrak{j} \cdot \tfrac{1}{2} a \cdot y \hat{-} \mathfrak{k} \cdot a \cdot z$$

genau dieselbe Form hat wie ein Vektor $\mathfrak{M}_f$, der die divergenzfreie Querdehnung und Längszusammenziehung eines zylindrischen Stabes bedeutet. Denn für eine bestimmte Oberfläche dürfte nur eine bestimmte divergenz- und wirbelfreie Vektorverteilung möglich sein, wenn dieselbe dem Spiegelungsprinzip genügen soll.

Auch widerlegt der Vektor $\mathfrak{M}_c$ die irrtümliche Anschauung, daß in einem elastischen Körper im Gleichgewichtsfalle nur symmetrische Tensoren vorkommen sollen. Vielmehr gibt der Vektor $\mathfrak{M}_c$, wie wir in § 35 an einem Beispiel gesehen haben, an und für sich zwei einander entgegengesetzt gleiche Hauptdehnungen, während die Dehnung in der dazu senkrechten Richtung gleich Null ist. Die eigentliche Drehung der Volumenelemente dagegen gibt überhaupt keine Dehnung.

Hinsichtlich des Restvektors $\mathfrak{M}_r$ haben wir im Gegensatz zu $\mathfrak{M}_f$ und $\mathfrak{M}_c$ bestimmte Bedingungen aufzustellen, bei deren Erfüllung erst die Gleichung 38 zutrifft. Offenbar muß nach 38:

$$p_1 + \varrho_3 + \sigma_2 = -(1-2k)\ (p_1 + p_2 + p_3)$$
$$r_2 + \sigma_1 + \pi_3 = -(1-2k)\ (r_1 + r_2 + r_3)$$
$$s_3 + \pi_2 + \varrho_1 = -(1-2k)\ (s_1 + s_2 + s_3)$$

gelten. Hieraus folgt, wenn $l = \frac{k}{1-k}$ gesetzt wird:

$$p_1 = -\tfrac{1}{2}(U_1 + l W_1)$$
$$r_2 = -\tfrac{1}{2}(U_2 + l W_2)$$
$$s_3 = -\tfrac{1}{2}(U_3 + l W_3).$$

Hiermit geht aber $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_r$ über in eine Form, die man aus 57 unmittelbar ablesen kann, wenn man darin für:

$$\mathfrak{U} = -l\,\mathfrak{W} \tag{60}$$

setzt, was eine besonders einfache Schreibweise der Gleichung 38 ist.

Es ist zu bedenken, daß Gleichung 38 auch:

$$\frac{2}{1-l} \nabla \operatorname{div} \mathfrak{M} = \operatorname{curl}^2 \mathfrak{M} = \mathfrak{W} \tag{61}$$

geschrieben werden könnte.

Nimmt man hiervon den curl, so folgt:

$$0 = \operatorname{curl}^3 \mathfrak{M} = \operatorname{curl} \mathfrak{W},$$

nimmt man die Divergenz, so folgt:

$$\frac{2}{1-l} \operatorname{div} \nabla \operatorname{div} \mathfrak{M} = 0 = \operatorname{div} \mathfrak{W}.$$

Der Vektor $\mathfrak{W}$ ist also abermals ein divergenz- und wirbelfreier Vektor und bildet Linien, die sich nirgends im elastischen Körper schließen, sondern immer nur an einer Stelle in ihn ein, an einer anderen aus ihm austreten. Es ist uns somit gelungen, das Elastizitätsproblem auf die Vektoren $\mathfrak{M}_f$, $\mathfrak{D}_c$ und $\mathfrak{W}$ zurückzuführen, die sämtlich divergenz- und wirbelfrei sind, und um deren Auffindung es sich im allgemeinen Falle zunächst handeln würde.

Hierzu läßt sich jedoch nur bemerken, daß im Falle einer einfachen Dehnung oder Zusammendrückung eines elastischen Körpers keine Drehung eintritt, hier also $\mathfrak{M}_c = 0$, $\mathfrak{D}_c = 0$ und $\mathfrak{W} = 0$ sein muß.

Umgekehrt tritt bei einer einfachen Drehung keine Dehnung und keine Zusammendrückung der Volumenelemente ein.

Hier ist also $\operatorname{div} \mathfrak{M} = 0$, $\mathfrak{M}_f = 0$ und auch $\mathfrak{W} = 0$.

So ergibt sich, daß nur im Falle der Biegung die Vektoren $\mathfrak{M}_f$, $\mathfrak{M}_c$ und $\mathfrak{W}$ zugleich von Null verschieden werden.

§ 48.

Beispiele.

1. Figur 29 stelle den Schnitt eines sehr breiten Bleches dar, welches ein wenig gebogen wird, so daß ein weites Rohr entstehen könnte, dessen Achse der zu XY senkrechten Z-Achse parallel ist.

Wir wollen $\mathfrak{M}_r = \xi \,.\, m_r$, $\mathfrak{M}_f = \xi \,.\, \alpha \,.\, m_f$ und $\mathfrak{M}_c = \xi \,.\, \beta \,.\, m_c$ setzen und die Bestimmung des Koeffizierten ξ beiseite lassen, soweit sich derselbe in einem besonderen praktischen Falle von selbst ergibt.

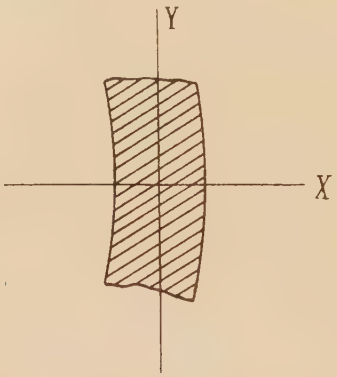

Fig. 29

Die Vektoren $\mathfrak{W}$ haben hier offenbar die Richtung der X-Achse, da das Blech an der Innenseite zusammengedrückt ($\Theta = -$), an der Außenseite gedehnt ist ($\Theta = +$). Wir setzen also $W_2 = W_3 = 0$.

Wenn wir die hierdurch Null werdenden Komponenten fortlassen, $k = \frac{2}{7}$, also $l = \frac{2}{5}$ und $W = 1$ setzen und zur Beseitigung der Brüche mit 60 multiplizieren, finden wir aus 57 und 60:

$$\overline{\overline{m}}_r = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \partial y & \partial z \\ \hline m_{r1} & -4\,dx & 19\,dy & 19\,dz \\ m_{r2} & 11\,dy & 11\,dx & 0 \\ m_{r3} & 11\,dz & 0 & 11\,dx \\ \hline \end{array}$$

Auch durch diese Formel werden natürlich die Differentialquotienten von m_r nicht im Aufpunkt, sondern in der Umgebung des Aufpunktes angegeben.

Für $\overline{\overline{m}}_f$ kann es, wenn dieselben Komponenten wie bei $\overline{\overline{m}}_r$ Null werden sollen, nur die Form geben:

$$\overline{\overline{m_f}} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline m_{f1} & +2\,dx & -dy & -dz \\ m_{f2} & -dy & -dx & 0 \\ m_{f3} & -dz & 0 & -dx \\ \hline \end{array}$$

und für $\overline{\overline{m_c}}$ nur die Form:

$$\overline{\overline{m_c}} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline m_{c1} & 0 & -dy & +dz \\ m_{c2} & dy & dx & 0 \\ m_{c3} & -dz & 0 & -dx \\ \hline \end{array}$$

Es ist nun klar, daß die Volumen-Elemente des gedachten Bleches in der Z-Richtung nicht ausweichen können; wir müssen also die Komponente M_3 und alle ihre Differentialquotienten gleich Null setzen. Außerdem muß auch $\frac{\partial M_1}{\partial z} = 0$ sein, da sich die Komponente M_1 offenbar, bei einer Verschiebung des Aufpunktes in der Z-Richtung, nicht ändert. Hieraus folgen die Bedingungsgleichungen $11 \cdot \alpha - \beta = 0$ und $-19 - \alpha + \beta = 0$, die durch $\alpha = -4$, $\beta = 15$ erfüllt werden. Setzen wir zur Vereinfachung $\xi = \frac{1}{30}$, so kommt schließlich für $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \xi (\overline{m_r} + \alpha \cdot \overline{\overline{m_f}} + \beta \cdot \overline{\overline{m_c}})$ die Form:

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_1 & -\frac{2}{5}\,dx & -dy & 0 \\ M_2 & +dy & +dx & 0 \\ M_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

mit den Integralen:

$$M_1 = -\tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 + C_1,\quad M_2 = xy + C_2,\quad M_3 = 0.$$

Hierdurch sind nicht nur die zuletzt gestellten Anforderungen, sondern auch Gleichung 38 erfüllt.

Weiter folgt $\Theta = \frac{3}{5}\,dx$. Dies gibt, in Gleichung 28 eingesetzt:

$$A = \frac{14}{27\,\alpha} \cdot \tfrac{3}{5}\,dx - \frac{7}{9\alpha} \cdot \tfrac{2}{5}\,dx = 0.$$

In Richtung X sind also keine Kraftlinien vorhanden, die Oberflächen sind im Gleichgewicht. Dagegen ist:

$$B = \frac{49}{45\alpha}\,dx,\quad C = \frac{14}{45\alpha}\,dx,$$

das Rohr erleidet also außen Zug, innen Druckbeanspruchung. Ist das Blech nicht sehr breit, so pflegt es sich infolge der Kraftlinien C aufzukrempen, wodurch M_3 von Null verschieden wird und unsere Formeln nicht mehr zutreffen. Wir können uns dann den Querschnitt wie in Figur 30 beansprucht denken, worin die Zuglinien ausgezogen, die

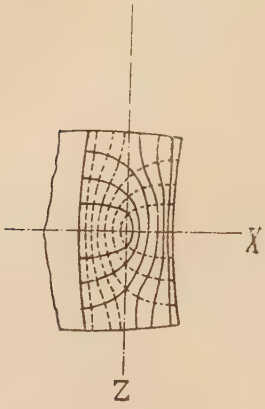

Fig. 30

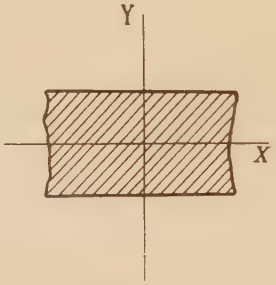

Fig. 31

Drucklinien punktiert sind. Allerdings könnten wir erst nach Durchführung des Spiegelungsprinzips von diesem Bild näher Rechenschaft geben.

2. Ein wenig kegelförmiger Stab, der die X-Achse zur Achse hat, möge auf Zug beansprucht werden (Fig. 31).

Auch hier fallen die $\mathfrak{W}$ in die X-Achse und $W_2 = W_3 = 0$. Zur Ermittelung von α und β haben wir hier die Bedingungen, daß die Querzusammenziehungen einander gleich und das $\frac{3}{7}$fache von der Längsdehnung sein sollen, also $-\frac{3}{7}(-4+2\alpha) = 11-\alpha+\beta = 11-\alpha-\beta$. Hieraus folgt $\alpha = 23$, $\beta = 0$. Es ergibt sich, wenn zur Vereinfachung $\xi = \frac{1}{45}$ gesetzt wird, die Form:

$$\overline{\mathfrak{M}} = \begin{array}{c|c|c|c} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline M_1 & +dx & -dy & -dz \\ M_2 & -\frac{3}{7}dy & -\frac{3}{7}dx & 0 \\ M_3 & -\frac{3}{7}dz & 0 & -\frac{3}{7}dx \end{array}$$

mit den Integralen $M_1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 + C_1$, $M_2 = -\frac{3}{7}xy + C_2$, $M_3 = -\frac{3}{7}xz + C_3$. Es folgt auch $\Theta = -\frac{3}{7}dx$, $A = \frac{1}{\alpha}dx$, $B = 0$, $C = 0$.

Die Formeln treffen nur für einen wenig kegligen Stab zu, da sonst sein Radius (dy bez. dz) gegenüber der Länge dx, wofür eigentlich x geschrieben werden müßte, nicht sehr klein bleibt und hierdurch das Oberflächengleichgewicht gestört wird.

§ 49.

Allgemeine Aufgabe der Elastizitätstheorie.

Die vorausgegangenen Beispiele, in denen nur die allereinfachsten Fälle in Betracht gezogen und außerdem kleine Größen vernachlässigt worden sind, lassen die Schwierigkeit des allgemeinen Elastizitätsproblems, d. i. des Problems eines auf seiner Oberfläche belasteten elastischen Körpers, erkennen. Für den allgemeinen Fall könnte man annehmen, daß zur Auffindung von $\mathfrak{W}$ die von Föppel angegebene Gleichung:

$$\mathfrak{W} = -\frac{1}{4\pi}\nabla\int\frac{\operatorname{div}\mathfrak{W}}{r}dv + \frac{1}{4\pi}\operatorname{curl}\int\frac{\operatorname{curl}\mathfrak{W}}{r}dv$$

verwendbar sein müßte. Indessen ist $\mathfrak{W}$ divergenz- und wirbelfrei, die beiden Glieder der rechten Seite werden also gleich Null. Hieraus folgt aber, daß $\mathfrak{W}$ nur von Divergenzen bez. von Wirbeln abgeleitet werden kann, die außerhalb des elastischen Körpers oder doch wenigstens auf der Oberfläche des elastischen Körpers fingiert werden müssen.

Diese Fiktion müßte, wenn das allgemeine Elastizitätsproblem als gelöst gelten soll, so vorgenommen werden, daß die Gesetze § 10 und 11 erfüllt sind, die infolge der Proportionalität von Θ mit Ψ natürlich auch für die Dehnungsmengen ausgesprochen werden können.

Dieselben Bedingungen und Schwierigkeiten wie bei $\mathfrak{W}$ treten natürlich auch bei $\mathfrak{M}_f$ und D_c auf. Wir müssen uns deshalb darauf beschränken, auszusprechen, daß es im Innern eines elastischen Körpers im Gleichgewichtsfalle außer einer homogenen Dehnung höchstens einen Verschiebungsvektor $\mathfrak{M}_f$, einen Drehungsvektor D_c und einen Drehungsvektor zweiten Grades $\mathfrak{W}$ gibt, die sämtlich divergenz- und wirbelfrei verteilt sind.

In Formeln läßt sich dies in folgender Weise ausdrücken. Da die Vektoren $\mathfrak{M}_f$, D_c und $\mathfrak{W}$ wirbelfrei sind, lassen sie sich von Potentialen P, Q und R ableiten, indem gesetzt wird:

$$\mathfrak{M}_f = \nabla P = i\frac{\partial P}{\partial x} \hat{+} j\frac{\partial P}{\partial y} \hat{+} k\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\mathfrak{D}_c = \nabla Q = i\frac{\partial Q}{\partial x} \hat{+} j\frac{\partial Q}{\partial y} \hat{+} k\frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$\mathfrak{W} = \nabla R = i\frac{\partial R}{\partial x} \hat{+} j\frac{\partial R}{\partial y} \hat{+} k\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Da sie aber auch divergenzfrei sind, gelten dann auch die Gleichungen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{M}_f = \nabla^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D}_c = \nabla^2 Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{W} = \nabla^2 R = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = 0.$$

Diese drei Gleichungen müssen im Innern des elastischen Körpers im Gleichgewichtsfalle erfüllt sein; die Ladungen $\nabla^2 P$, $\nabla^2 Q$ und $\nabla^2 R$, von denen diese Potentiale P, Q und R abzuleiten sind, müssen also gleichfalls außerhalb des elastischen Körpers oder doch wenigstens auf seiner Oberfläche fingiert werden.

Am 5. September 1882 wurde ich, Johannes Erich Arthur Geißler, zu Dresden geboren als Sohn des verstorbenen Geheimen Regierungsrats Dr. med. Geißler, Direktor des Königl. Sächs. Statistischen Landesamtes in Dresden, und in dem evangelisch-lutherischen Bekenntnis erzogen. Ich besuchte die Bürgerschule und das Königl. Gymnasium zu Dresden-Neustadt, das ich Ostern 1902 mit dem Reifezeugnis verließ. Von da an bis Ostern 1911 studierte ich mit Unterbrechungen durch praktische Jahre an den Technischen Hochschulen zu Dresden und Charlottenburg und den Universitäten zu Berlin und Rostock. Hier hörte ich Vorlesungen aus dem Gebiete des Maschineningenieurfaches, für das ich mich anfangs auszubilden gedachte, der Mathematik, der theoretischen und experimentellen Physik, der physikalischen und experimentellen Chemie und endlich über Philosophie und Nationalökonomie. An praktischen Uebungen nahm ich besonders teil in der Elektrotechnik, Elektrochemie und physikalischen Chemie. Meine akademischen Lehrer waren unter anderen die Herren Professoren Helm, Rohn, Hempel, Grübler und Hallwachs (Dresden), Slaby und Lampe (Charlottenburg), Krigar-Menzel und Planck (Berlin), R. H. Weber und Kümmell (Rostock).

Für freundliche Ratschläge bei meiner wissenschaftlichen Arbeit spreche ich Herrn Prof. Dr. R. H. Weber, sowie auch Herrn Prof. Dr. Krigar-Menzel meinen ganz besonderen Dank aus.